

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Gestionale / Ingegneria Informatica
prova scritta del 11-7-2000

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^8 = 81 \\ z^7 - 27z + \bar{z} \cdot z^6 - 27\bar{z} \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $\dim(\text{Ker}(f_t))$ e $\dim(\text{Im}(f_t))$.

Per i valori di t per cui $\text{Ker}(f_t) \neq \{0\}$:

- (ii) si determinino gli autovalori di f_t ;
- (iii) si dica se esiste una base di autovettori di f_t .

Esercizio 3. [Ingegneria Gestionale]

Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x + 4y + 5z \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix}$$

(i) Si trovi una base di $\text{Ker}(f)$.

(ii) Si dica se esiste una soluzione di $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{R}^3 = W \oplus \text{Ker}(f)$.

Esercizio 3. [Ingegneria Informatica]

Sia $V \subset \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale (su \mathbf{R}) generato dalle funzioni

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x)$$

(i) determinare una base di V .

Si consideri il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ definito da

$$\langle f, g \rangle = (f \cdot g)'(0)$$

(ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.

(iii) Dire se tale prodotto scalare è definito o indefinito.

Esercizio 4. [Ingegneria Informatica]

Si determini il numero di soluzioni intere positive ≤ 3520 del sistema

$$\begin{cases} (x, 80) = 10 \\ 2^x \equiv 18 \pmod{23} \end{cases}$$

Esercizio 5. [Ingegneria Informatica]

Determinare la decomposizione in cicli delle permutazioni in Σ_{12} che hanno ordine 30 e sono senza punti fissi.