Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria _____ (Corso di Laurea)

prova scritta del 22-7-2003

_____ (Cognome) _____ (Nome) _____ (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{2z} + 8ie^{3\overline{z}} = 0 \\ |z + \log_e 8| \leq 10\pi \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\beta & 0 \\ -1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ determinare gli autovalori di f_β, specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determini per quali valori di β, f_β è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

(iii) Si determini per quali valori di β il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per f_β.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) Si determinino tutte le soluzioni del sistema $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$, $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0\}$

si determini dim $(W \cap Im(f))$ e dim $(W + Im(f))$.