prova scritta del 4-2-2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = -\overline{z}^2 \\ (z+2)^4 = -4 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $f_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Eserczio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.

(ii) Si dica se f è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.

(iii) Dimostrare che $Ker(f) = Im(f)$.