Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

prova scritta del 16-6 -2005

Esercizio 1.
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (\overline{z} - i)^3 = z + i \\ z^5 + 4z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & +4x_2 & +4x_3 \\ x_1 & & -x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$,

Determinare, se esistono, i valori di t per cui si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.
(iv) Dimostrare che f^2 è diagonalizzabile.