

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z - i)^2 = 2 \cdot (\bar{z} + i) \\ |e^z| > 1 \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-7]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 \\ 0 & -5 & t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \right\}$,

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f_t) \oplus W$.

Esercizio 3 [punteggio: 0-5] Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_3 = 0 \right\}$$

i) Si indichi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(W) \subseteq W$, $\text{rg}(f) = 1$.

ii) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-5]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.