Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014
Prova scritta del 18/12/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 2-4i \implies z^{-1} = \boxed{\frac{1}{10} + i\frac{1}{5}}$
- $z = 2-4i$, $w = 1-3i \implies Re(z \cdot w) = \boxed{-10}$
- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}, \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle. \quad \text{Allora } \mathbb{R}^3 = W + Z$$

~~vero~~	falso

Determinare una base di $W \cap Z$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{4}$

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione $= \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{6}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	~~falso~~

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$\cancel{A_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 42 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$

18-12-2014

1) $$\begin{cases} (z+2i)^3 = -2(\bar{z}-2i) \\ |e^{iz}| = e^3 \end{cases}$$

I: $z+2i = w \qquad \bar{z}-2i = \bar{w}$

$\mathrm{I} \iff \quad w^3 = -2\bar{w}$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \qquad \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 2 \cdot \rho \cdot e^{-i\vartheta + i\pi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3 \end{cases} \cup \{w = 0\}$$

$z = w - 2i$

$\Rightarrow$ SOLUZIONI: $\quad z_0 = 1 - i$

$z_1 = -1 - i$

$z_2 = -1 - 3i$

$z_3 = 1 - 3i$

$z_4 = -2i$

II: $\left| e^{iz} \right| = \left| e^{i(x+iy)} \right| =$

$$\underbrace{\left| e^{ix} \right|}_{=1} \cdot \left| e^{-y} \right| = e^{-y} = e^{+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

conclusione:

SOL. SISTEMA : $z_2 = -1-3i$

$z_3 = 1-3i$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = -8t^2 - 8t + 16$

$\det = 0 \iff t = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$t \neq 1, -2 \quad \begin{cases} rk = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow \quad t = 1, -2 \quad \begin{cases} rk = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

ii) $t \neq 1, -2 \quad \exists!$ sol.

$\underline{t = 1}$ $\quad rk(A) = 2$, $rk(A \vdots b) = 3$ $\Rightarrow$ non $\exists$ sol.

$\underline{t = -2}$ $\quad b = -\frac{1}{2}$ I colonna $\Rightarrow rk(A) = rk(A \vdots b) = 2$
$\Rightarrow \exists\ \infty$ SOLUZIONI

iii) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim(W) = 1$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) \oplus W$

eventualmente SOLAMENTE se $\dim(\operatorname{Im}) = 2$

$\underline{t = 1}$ VERO

$t = -2$ FALSO $\quad \operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W = W$

---

3 $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\operatorname{Im}(f) = \{ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$

$\operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

BASE $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ Possiamo imporre $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ I colonna A

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ II colonna A

5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a = -1$

$b = -1$

$c = -1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 2)^2$$

AUTOVALORI: $0 \quad m.a.(0) = 2 = m.g.(0)$

$2 \quad m.a.(2) = 2 = m.g.(2)$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda = 0$: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda = 2$: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è triang.le

A è diag.le poichè $\forall \lambda_i$ $m.a = m.g.$

N.B. A è simmetrica!