Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 18/01/2017

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)   MARCO (Nome)   (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -4 + i4\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{8 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}}$

- Sia $z = -4 + i4\sqrt{3}$. Scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana : $z =$ $\boxed{512}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x_1+x_2+3x_3 = 0\}\ ,\ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$ Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ vero ~~falso~~

- Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

$W = Z$!

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{3} \quad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{-3}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile vero ~~falso~~

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \implies A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

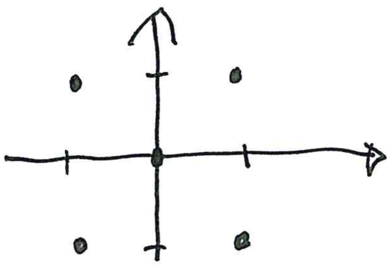
Prove del 18-01-2017

① $$\begin{cases} z^4 = -2|z|^2 \\ |z+i| \geq z \end{cases}$$

I. eq. $\iff$ $$\begin{cases} \rho^4 = 2\cdot\rho^2 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Sol: $\rho = 0$
$(z=0)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \end{cases}, k = 0,1,2,3$$



$z_4 = 0$
$z_0 = 1+i$
$z_1 = -1+i$
$z_2 = -1-i$
$z_3 = 1-i$

II. eq. $\iff$ $\sqrt{x^2+(y+1)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2} \iff 2y+1 \geq 0$
$\iff y \geq -\frac{1}{2}$

SOLUZIONE SISTEMA: $z_4 = 0$
$z_0 = 1+i$
$z_1 = -1+i$

(2) $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$

i) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rg \geq 2$

$\det = -t^2 + 5t$

$\Rightarrow \quad t \neq 0, 5 \qquad rg = 3 \qquad \dim(\ker) = 0$

$\quad t = 0, 5 \qquad rg = 2 \qquad \dim(\ker) = 1$

ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t \neq 0, 5$ $\quad \exists!$ SOL.

$t = 0$ $\quad \exists \infty$ SOL.

$t = 5$ $\quad$ non $\exists$ SOL.

iii) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ Base $W = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ = base $Im(f)$

Scegliamo $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come base Ker.

Posso prendere $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 9 + a = 0 \\ b = 0 \\ 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

i) $P_{CAR}(\lambda) = -\lambda^3$

$rg(A) = 2$

$\longrightarrow$ AUTOVALORE $\lambda_0 = 0$ $\quad$ $m.a. = 3$

$m.g. = 1$

ii) Autospazio relativo a $\lambda_0 = 0$ $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

iii) A è triang.^{le} , non è diag.^{le}

iv) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$P_{CAR} = -\lambda^3$

$rg(A^2) = 1$

$\Rightarrow$ autovalore $\lambda = 0$ $\quad$ $m.a. = 3$

$m.g. = 2$

$\Rightarrow A^2$ non è diag.^{le}