Ingegneria Gestionale - Elettronica - delle telecomunicazioni
Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2010/2011

prova scritta di ALGEBRA LINEARE
20/7/2011
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

Esercizio 1: Risolvere a scelta l'esercizio (1.1) oppure l'esercizio (1.2).

(1.1) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ avente per elementi le A tale che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si indichi un sottospazio V di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $\mathbb{R}^{2\times 2} = W \oplus V$.

(1.2) Sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & t & 4 \\ t & 1 & -t \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\begin{pmatrix} 0 & t & 4 \\ t & 1 & -t \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Specificare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è unica e i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione ≥ 1.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \right\}, \quad W = \left\{ B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\} .$$

Si provi che la somma $V + W$ è diretta.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} .$$

- Si indichi una $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tale che $\mathscr{L}_A f = \iota \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.
  Suggerimento: indicare il comportamento di f sulla base

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

- Si determini la matrice $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tale che $f = \mathscr{L}_B$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e siano

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}, a = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

- Si determinino la proiezione ortogonale e la componente normale di a su V.
- Si indichi $b \in V$ la cui distanza da a sia 20.

Esercizio 5: Risolvere a scelta l'esercizio (5.1) oppure l'esercizio (5.2).

(5.1) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\} , W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che

- ◦ V, W siano autospazi di A,
- ◦ e che $f^2 = f$.

(5.2) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare $\bullet$ associato alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Si determini il tipo di definizione di tale prodotto scalare.