anno accademico 2001/2002

ESERCITAZIONE 3.4

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A matrice 3×3; $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rg}\ (A) = 2$	☐	☐
A matrice 3×3; $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rg}\ (A) \leq 2$	☐	☐
A matrice 3×3; $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\ (A) = 3$	☐	☐
Un sistema lineare di 3 equaz. in 3 incognite ha al piú una soluzione	☐	☐
Un sistema lineare di 3 equaz. in 3 incognite ha ameno una soluzione	☐	☐
0 è autovalore per $f \Rightarrow ker(f) \neq \{0\}$	☐	☐
$ker(f) \neq \{0\}\ \Rightarrow$ 0 è autovalore per f	☐	☐

- Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

DETERMINARE :
i) Il polinomio caratteristico di f
ii) Gli autovalori di f
iii) Gli autovettori di f

- Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

DETERMINARE :
i) Il polinomio caratteristico di f
ii) Gli autovalori di f
iii) Gli autovettori di f

- Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ 2x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$

DETERMINARE :
i) Il polinomio caratteristico di f
ii) Gli autovalori di f
iii) Gli autovettori di f

- Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

DETERMINARE :
i) Il polinomio caratteristico di f
ii) Gli autovalori di f
iii) Gli autovettori di f

- Data la funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix}$

DETERMINARE :
i) Il polinomio caratteristico di f
ii) Gli autovalori di f
iii) Gli autovettori di f

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-z-w \\ y-2z \\ x-3z-w \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$.

(ii) Si determinino, se esistono, le soluzioni del sistema $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{R}^3 = W \oplus Im(f)$.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + & tx_2 & +2x_3 & = t+1 \\ tx_1 & & +tx_3 & = t \\ tx_1 + & -tx_2 + & x_3 & = t \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di t per cui

(i) il sistema ha un'unica soluzione.

(ii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 1.

(iii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 2.

(iv) il sistema non ha soluzione.

Esercizio 4. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

Per i valori di t per cui $Ker(f_t) \neq \{0\}$:
(ii) si determinino gli autovalori di f_t;
(iii) si dica se esiste una base di autovettori di f_t.

Esercizio 5. Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta+2 \\ \beta & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta+2 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbf{R}$ determinare la dimensione di $ker(f_\beta)$ e $Im(f_\beta)$
(ii) Posto $\beta = -2$ determinare gli autovalori di f_β e la dimensione degli autospazi relativi.