Ingegneria Gestionale - Corso di Analisi II e Algebra

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 3.3

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	☐	☐
$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	☐	☐
$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	☐	☐
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	☐	☐
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva .	☐	☐
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 2$	☐	☐
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 1$	☐	☐
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 1$	☐	☐
$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 2$	☐	☐

- Sia A una matrice quadrata, $n \times n$, scritta come $A = \Big(v_1, v_2, v_3, ..., v_n\Big)$, $\quad con \quad v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Allora

Proposizione	Vera	Falsa
$v_3 = v_1 \Rightarrow \det A = 0$	☐	☐
$v_3 = -v_1 \Rightarrow \det A = 0$	☐	☐
$v_3 = 2v_1 + 5v_2 \Rightarrow \det A = 0$	☐	☐
$\det(A) = \det\Big(v_2, v_1, v_3, ..., v_n\Big)$	☐	☐
$\det(A) = \det\Big(v_2, v_3, v_1, ..., v_n\Big)$	☐	☐
$\det(A) = \det\Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n + 3v_1]\Big)$	☐	☐
$\det(A) = \ \det\Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n - 3v_2]\Big)$	☐	☐

- Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare e sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Allora :

Proposizione	Vera	Falsa
$rk(f) = 3 \Rightarrow \quad \det(A) \neq 0$	☐	☐
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad rk(f) = 3$	☐	☐
$rk(f) < 3 \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$	☐	☐
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad Ker(f) = \{0_V\}$	☐	☐
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad Ker(f) \neq \{0_V\}$	☐	☐
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad \exists \ \ v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = 0_V$	☐	☐

Esercizio 1. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $A \cdot X = b$, dove $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Per i valori di t per cui esiste almeno una soluzione del precedente sistema, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni, specificando in particolare. quando la soluzione e' unica.

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 2t & t \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $A \cdot X = b$, dove $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Calcolare il determinante, il rango e la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare associata di ciascuna delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 19 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. per ciascuna delle seguenti matrici determinare una base dell'immagine e una base del nucleo dell'applicazione lineare associata $l_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 19 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$