

# LA MATEMATICA DEI VIDEOGIOCHI

Marco Franciosi  
Università di Pisa

## Introduzione

Il mondo contemporaneo è cambiato negli ultimi venti anni con una rapidità che non ha eguali nella storia dell'umanità. I telefoni cellulari, i computer, Internet, hanno cambiato il nostro modo di comunicare, di conoscere e di percepire tutto ciò che ci circonda.

Le nuove tecnologie si evolvono giorno per giorno e nuovi scenari si presentano per le generazioni future. Per i giovani è sempre più importante riuscire a gestire i nuovi dispositivi e le nuove tecniche in modo attivo e non passivo, magari con l'idea di recitare un ruolo non marginale nel nuovo millennio. In particolare è di fondamentale importanza riuscire a raccogliere la sfida globale che nasce quotidianamente dalla scoperta e dallo sviluppo di nuovi strumenti tecnologici.

Nuove figure professionali si sostituiscono alle vecchie e si vengono a creare spazi per nuove tipologie di lavoro, che spesso risultano essere interessanti e stimolanti. Essere pronti e preparati ad inserirsi nei nuovi contesti è una scelta cardine per affrontare il futuro.

Secondo molti esperti di economia un modo per affrontare la crisi economica consiste proprio nell'investire in programmi di ricerca di sviluppo, creando nuovi posti di lavoro e con l'autentico auspicio di risolvere alcune delle questioni cardine della società contemporanea.

## Videogiochi: non solo un gioco da ragazzi

Un'opportunità di sviluppo viene dal mondo dei videogiochi. Poter lavorare nell'industria dei videogame non è un'eventualità così remota. Lavorare allo sviluppo di un nuovo software inter-

attivo richiede competenze specifiche, ma anche fantasia e capacità comunicativa e può essere ricco di grandi soddisfazioni.

Dal punto di vista economico vale la pena sottolineare che a partire dal 2002 il fatturato dell'industria americana di videogame ha superato il fatturato dell'industria cinematografica. Inoltre la crescita annua delle vendite di videogiochi negli ultimi anni è stata superiore al 30%.

Per quantificare l'entità del giro economico si noti che il fatturato previsto negli USA nel 2009 è di 57 miliardi di dollari, mentre in Giappone la Nintendo è seconda solamente alla Toyota !

E' quindi un mercato in forte espansione che promette nuove e interessante possibilità di lavoro. Attualmente vi è infatti una carenza mondiale di sviluppatori; i paesi anglosassoni ed il Giappone stanno organizzando scuole specializzate per far fronte all'esigenza di queste nuove figure professionali.

E' inoltre interessante osservare che i costi per le case produttrici sono in una buona parte dedicati alla pubblicità dei loro prodotti e per il resto investiti in ricerca e sviluppo. La percentuale di guadagno per gli sviluppatori di software è mediamente del 20%.

Infine una nota di carattere sociale: la figura del genio informatico chiuso nella cantina di casa che crea software geniali ormai è obsoleta. In California nella seconda metà degli anni '90 gli sviluppatori di videogiochi si sono organizzati in un sindacato e hanno cominciato a rivendicare i loro diritti riuscendo ad ottenere uno stipendio minimo di 75.000 dollari annui (lordi).

In conclusione lo sviluppatore di videogiochi è a mio giudizio un interessante lavoro ed un'importante opportunità.

## Grafica di un videogioco

Nella realizzazione di un videogioco sono fondamentali i seguenti punti

1. Storia
2. Grafica dell'ambiente: paesaggio, architettura, ecc...
3. Grafica dei personaggi: espressività, verosimiglianza e rapidità di adattamento ai cambiamenti (comandi del giocatore, punti di vista, ecc...)

In effetti in molte riviste e in molti siti specializzati i videogiochi vengono giudicati con punteggi diversi per la storia e per la grafica e quest'ultima viene analizzata in ogni dettaglio.

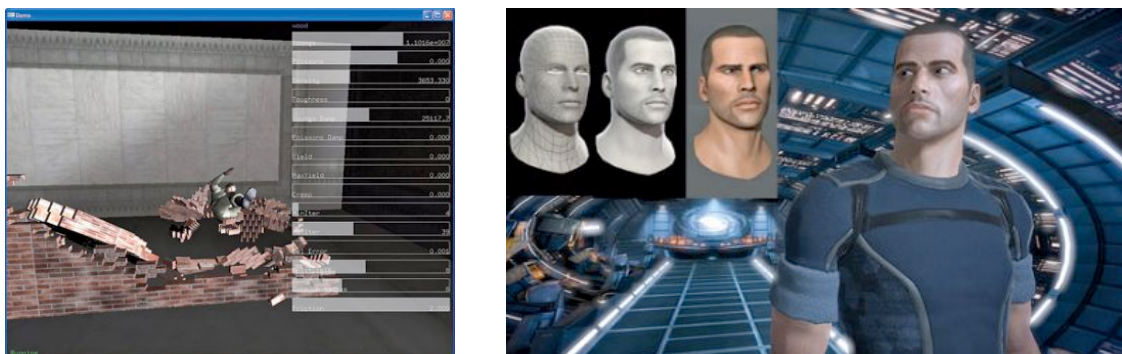
La realizzazione grafica dei personaggi e dell'ambiente assume un ruolo fondamentale per rendere gradevole il gioco.

Per un matematico queste problematiche sono interessanti e gratificanti. Infatti tutte le soluzioni ai problemi legati alla grafica si basano su teorie matematiche e fisiche (più o meno classiche) quali ad esempio la prospettiva, l'interpolazione polinomiale, la fluidodinamica, la cinematica. In questo contesto, la geometria e l'algebra hanno un ruolo fondamentale per poter realizzare i software necessari.



*fig.1: acqua e fuoco*

Tra le questioni che non sono state ancora completamente risolte e che sono oggetto di studio e di sperimentazione vale la pena citare le problematiche relative alla realizzazione dell'acqua e del fuoco (fig. 1), della dinamica dei materiali (ad esempio un muro che crolla, fig. 2) e soprattutto delle facce umane.



*fig.2:dinamica dei materiali e facce umane*

Per affrontare problemi di questo tipo non è sufficiente fare affidamento su computer sempre più potenti. Le nuove capacità di calcolo devono essere sfruttate ad esempio per migliorare la realizzazione degli ambienti e la velocità dei movimenti dei personaggi. Occorre introdurre concetti matematici e sviluppare nuovi modi di fare i calcoli.

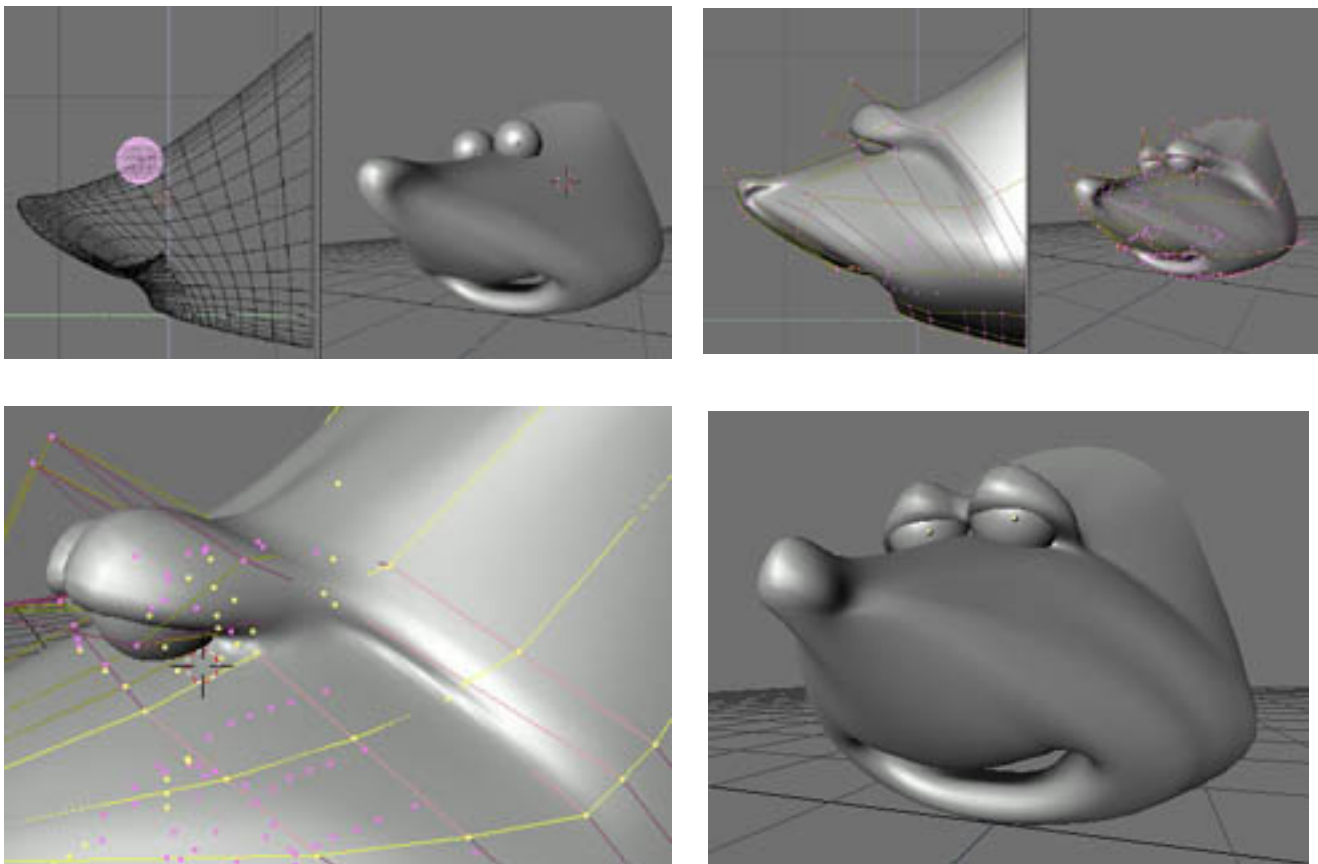
Lo schermo è fatto di pixel, ovvero è suddiviso in piccolissimi quadratini. Per una rappresentazione efficace non si può imporre al computer di tener conto di ciascun singolo pixel, separatamente dagli altri.

E' necessario introdurre equazioni capaci di legare i vari pixel e di adattarsi ai cambiamenti. Ad esempio, se si cambia il punto di vista il paesaggio deve cambiare immediatamente. Analogamente il protagonista del gioco deve essere in grado di rispondere rapidamente agli stimoli del giocatore.

Le teorie fondamentali capaci di creare i presupposti per un'efficace realizzazione grafica sono a mio avviso le seguenti:

- Interpolazione polinomiale
- Geometria proiettiva

## Interpolazione polinomiale

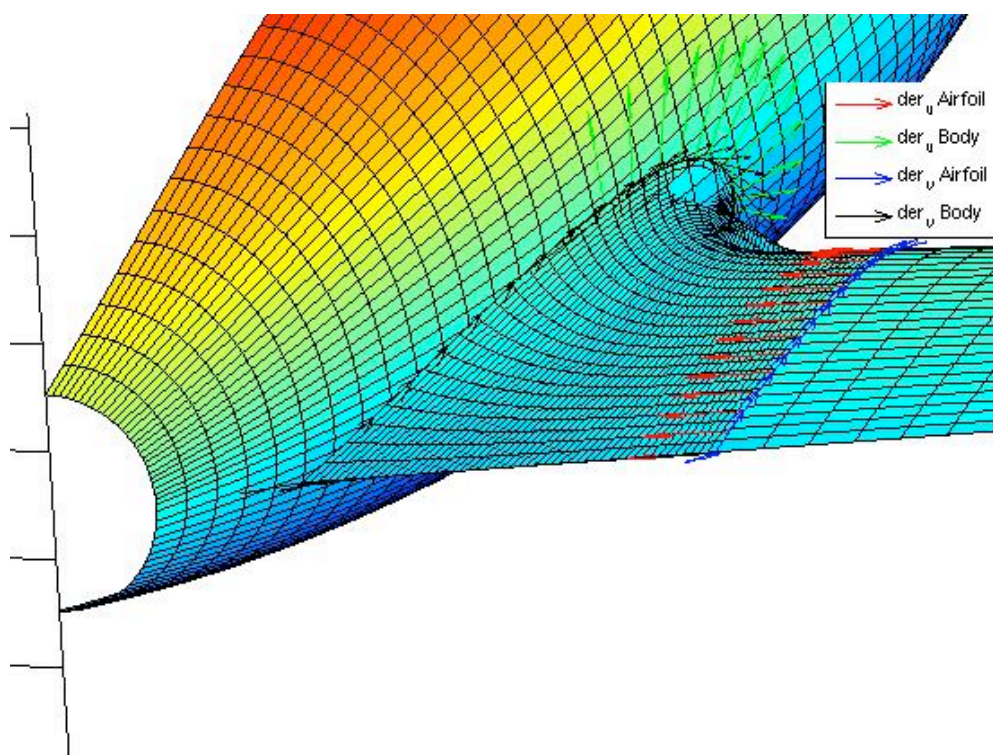


*fig.3:costruzione di un personaggio tridimensionale*

L'interpolazione polinomiale è un metodo per disegnare delle curve o superfici (che corrispondono a equazioni polinomiali) capaci di approssimare una determinata forma, passando per certo numero di punti predeterminati.

Il loro utilizzo permette al computer di memorizzare solamente le equazioni date e con velocissimi calcoli realizzare le curve o le superfici necessarie per costruire l'immagine con una precisione che può essere cambiata di volta in volta.

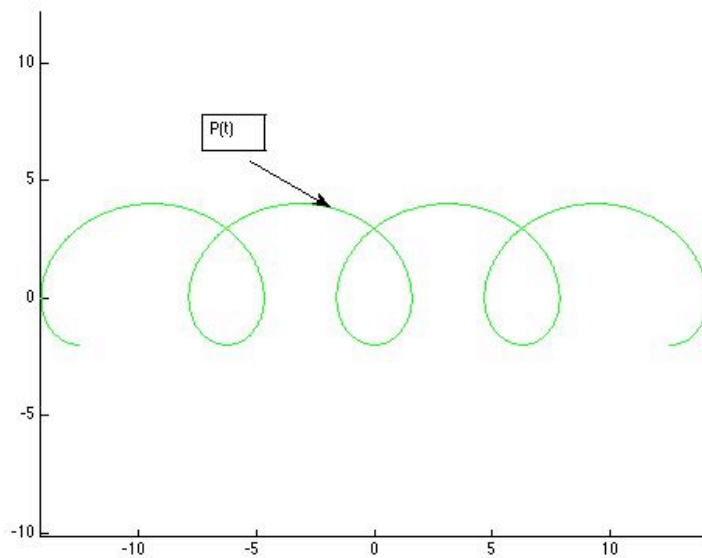
Nelle figure 3 e 4 sono illustrate due applicazioni della teoria delle superfici interpolanti. Nel primo esempio si mostra come costruire un personaggio tridimensionale partendo da un certo numero di punti (detti punti di controllo) e di figure semplici (quali la sfera). Il computer riesce a costruire la superficie richiesta partendo da una semplice "griglia". Per modificare la superficie semplicemente si muovo i punti colorati. Nel secondo esempio si mostra come utilizzare queste tecniche per progettare aeromobili. Nel particolare mostrato viene illustrato come incollare l'ala dell'aereo alla fusoliera secondo condizioni di "continuità" e "liscezza" necessarie per garantirne la stabilità in volo.



*fig.4: particolare di un progetto di aeromobile*

Le idee matematiche che stanno alla base di questa teoria sono semplici e possono essere facilmente comprese dagli studenti delle scuole superiori.

Il vantaggio nell'utilizzo dei polinomi risiede nella relativa facilità con cui il computer esegue i calcoli necessari nel loro utilizzo.



*fig.5: parametrizzazione di una curva chiamata cicloide*

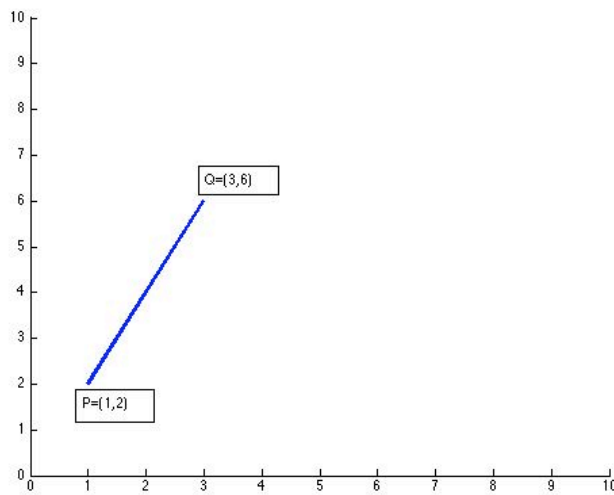
Il punto di partenza per poter sviluppare tali idee si basa sulla nozione fondamentale di “parametrizzazione”.

Parametrizzare una curva significa descriverla mediante l'utilizzo di un parametro “esterno”. Ad esempio se si considera il percorso di una nave che si muove da un porto all'altro, la traiettoria percorsa può essere descritta mediante l'utilizzo del parametro tempo “t”: ad ogni istante possiamo individuare la latitudine e la longitudine della nave stessa e poi possiamo disegnare il tragitto percorso segnando volta per volta le coordinate.

Ovvero parametrizzare una curva corrisponde a disegnarne l'evoluzione al variare di un parametro “t”.

Per capire come si arriva a sviluppare i primi esempi di interpolazione cominciamo descrivendo come si può descrivere un segmento mediante l'uso di un parametro “t”.

Consideriamo nel piano Cartesiano il punto P di coordinate (1,2) e il punto Q di coordinate(3,6)



*fig.6: segmento*

Usando la notazione vettoriale il segmento PQ può essere descritto come il cammino di un punto materiale che parte da P e si muove con velocità costante data dal vettore differenza Q-P.

Si ha pertanto la seguente la seguente descrizione parametrica del segmento

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

OVVERO

$$\overline{PQ} = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

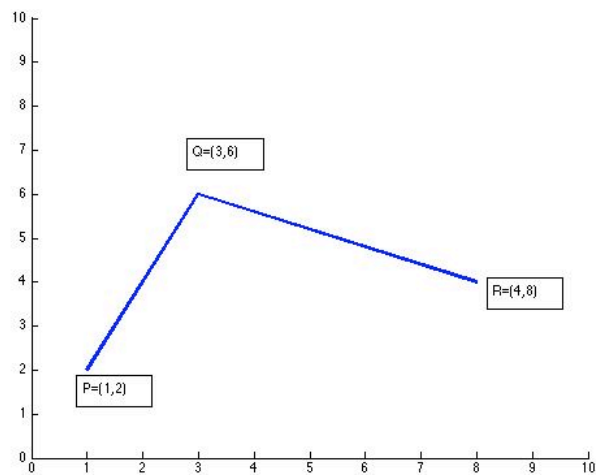
*eq.7: equazione parametrica del segmento*

In coordinate  $x, y$  otteniamo

$$\overline{PQ} = \begin{cases} x = (1-t) \cdot 1 + t \cdot 3 \\ y = (1-t) \cdot 2 + t \cdot 6 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

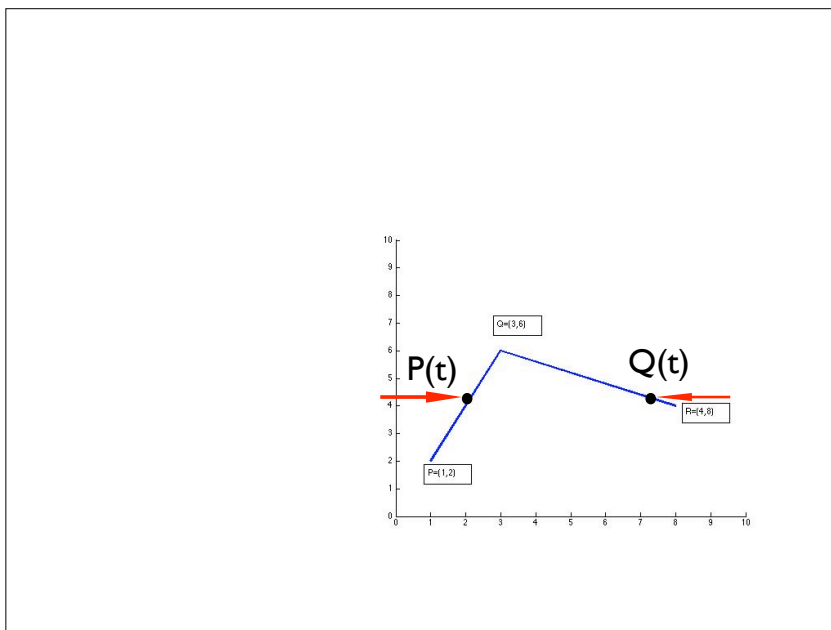
*eq.8: equazione parametrica del segmento in coordinate*

Consideriamo adesso un terzo punto R di coordinata (4,8) e la spezzata generata P,Q ed R, ovvero l'unione dei due segmenti PQ e QR.



*fig.9: spezzata generata dai tre punti*

Per costruire una curva liscia capace di approssimare la spezzata PQR iteriamo la costruzione precedente utilizzando un punto  $P(t)$  sul primo segmento e un punto  $Q(t)$  sul secondo.



*fig. 10: punti sui due rami della spezzata*

Dal punto di vista algebrico otteniamo



$$\begin{aligned}
 &(1-t) \cdot P(t) + t \cdot Q(t) = \\
 &(1-t)[(1-t)P + tQ] + t[(1-t)Q + tR] = \\
 &(1-t)^2 \cdot P + 2t(1-t) \cdot Q + t^2 \cdot R
 \end{aligned}$$

*eq.II: equazione della curva interpolante*

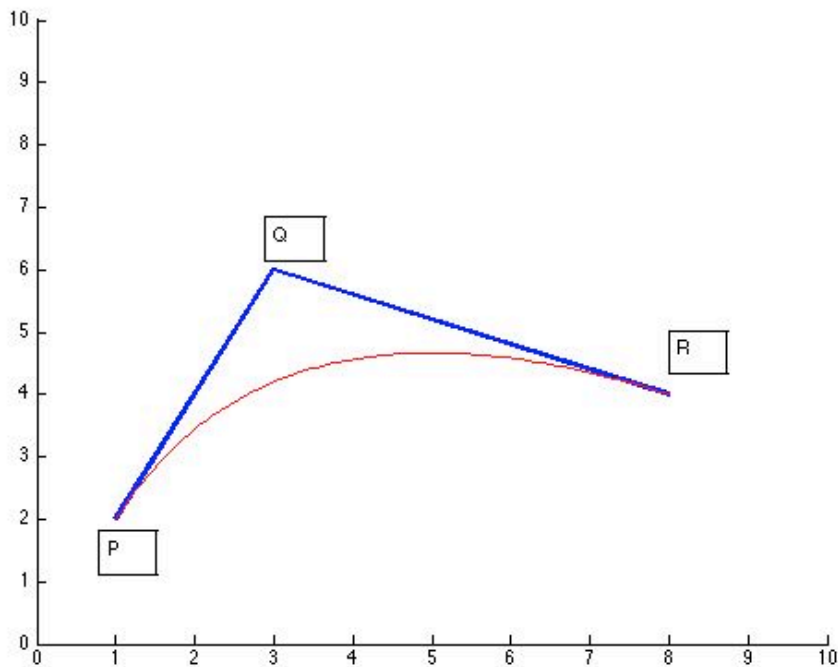
In coordinate  $x, y$

se  $P = (1, 2), Q = (3, 6), R = (4, 8)$  otteniamo

$$\begin{cases}
 x = (1-t)^2 \cdot 1 + 2t(1-t) \cdot 3 + t^2 \cdot 4 \\
 y = (1-t)^2 \cdot 2 + 2t(1-t) \cdot 6 + t^2 \cdot 8 \\
 0 \leq t \leq 1
 \end{cases}$$

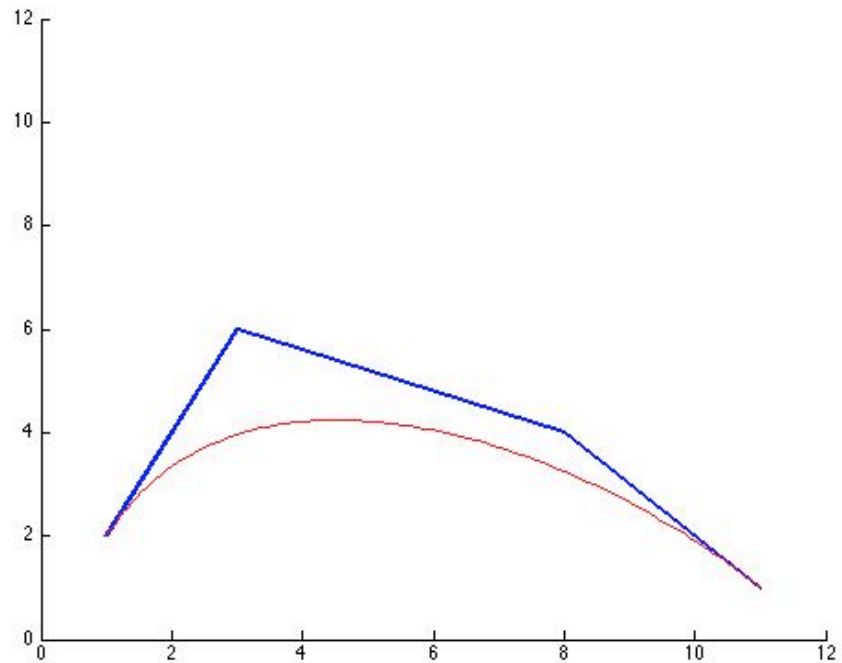
*eq.I2*

Il disegno della curva ottenuta è il seguente.



*fig.13: curva che approssima la spezzata PQR*

La curva ottenuta segue il profilo della spezzata e negli estremi è tangente ai due segmenti.  
 Se abbiamo invece un quarto punto S, iteriamo nuovamente il precedente argomento e otteniamo la seguente curva



*fig.14: curva che approssima la spezzata PQRS*

Riepilogando la curva che approssima la spezzata PQR è data dall'equazione (vettoriale)

$$(1 - t)^2 \cdot P + 2t(1 - t) \cdot Q + t^2 \cdot R$$

*eq. 15*

mentre la curva che approssima la spezzata PQRS è data dall'equazione (vettoriale)

$$(1 - t)^3 \cdot P + 3t(1 - t)^2 \cdot Q + 3t^2(1 - t) \cdot R + t^3 \cdot S$$

*eq. 16*

Le equazioni così ottenute sono determinate da polinomi fissati moltiplicati per i coefficienti dati dalle coordinate dei punti. Se si sposta un punto basta cambiare i corrispondenti coefficienti e si ottiene la nuova curva. Pertanto queste curve si prestano molto bene ad essere manipolate mediante trasformazioni (affini) del piano. Il computer per trasformarle ha bisogno solamente di avere le informazioni relative alle coordinate dei punti: attraverso un piccolo database che raccoglie le equazioni dei polinomi di base può ridisegnare la nuova curva in una frazione di secondo.

Per chi è appassionato di algebra vale la pena sottolineare come nascono i polinomi usati nelle equazioni.

Si tratta semplicemente di considerare lo sviluppo delle potenze del binomio  $(t + (1-t))$ :

$$((1 - t) + t)^2 = (1 - t)^2 + 2t(1 - t) + t^2$$

$$((1 - t) + t)^3 = (1 - t)^3 + 3t(1 - t)^2 + 3t^2(1 - t) + t^3$$

*eq. 17*

(si noti che per qualsiasi valore di  $t$  il risultato è sempre 1).

In generale, i monomi ottenuti dallo sviluppo della potenza ennesima del binomio sono i polinomi utilizzati per creare una curva interpolante  $n+1$  punti.

Questa semplice osservazione permette di considerare tali monomi come i mattoni fondamentali per sviluppare una teoria completa e di facile applicazione.

## GEOMETRIA PROIETTIVA

La prospettiva nasce dalla necessità di rappresentare in modo coerente lo spazio usuale (tridimensionale) su un dipinto o in generale su una superficie piana (bidimensionale). Sono noti a tutti i quadri del medioevo e le opere dei maestri rinascimentali. Senza voler inserire parametri di gradimento, nei primi il tentativo di dare profondità all'ambiente e corpo ai personaggi fallisce drasticamente, sintomo della necessità di una teoria rigorosa per riuscire a realizzare ambienti complessi e strutturati. Invece in alcuni dipinti rinascimentali si nota un'estrema precisione nelle proporzioni che va ben al di là della sensibilità dell'occhio umano, sinonimo della volontà di espressione di regole ben precise riguardanti la teoria della rappresentazione.

Possiamo indicare il XV secolo come momento significativo per indicare la nascita (o la rinascita secondo alcuni storici) della prospettiva: Filippo Brunelleschi le esemplifica nelle tavolette

(perdute) rappresentative del Battistero di Firenze, Leon Battista Alberti con il trattato *De pictura* e successivamente Piero della Francesca con il *De prospectiva pingendi* le codificano in modo sistematico. Nella pratica pittorica suggerita da questi maestri, le rette parallele che si allontanano dall'osservatore si vedono convergere in un punto (detto punto all'infinito), come se in quel 'dove' dovessero di fatto incontrarsi. L'insieme di tutti questi 'dove' viene rappresentato sulla tela del pittore dalla cosiddetta retta all'infinito.

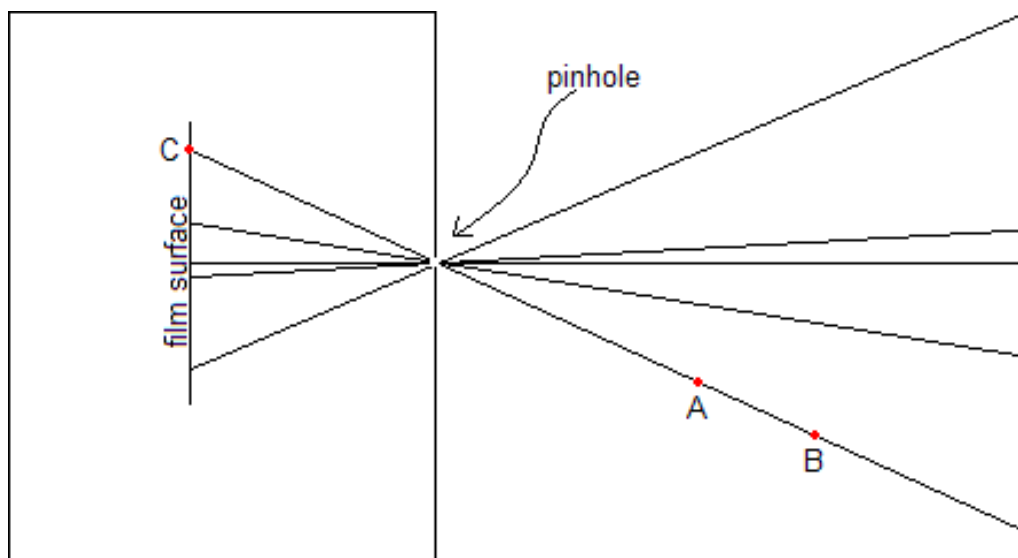
Partendo da queste costruzioni geometriche il matematico francese Gerard Desargues, contemporaneo di Cartesio, costruisce e sviluppa la cosiddetta geometria proiettiva, descritta al pari della geometria euclidea in maniera puramente sintetica, dove l'infinito trova una sua ben precisa collocazione. Le potenzialità di questa nuova teoria appaiono immediatamente a Desargues, che ne mostra immediatamente le applicazioni teoriche (vedi il trattato sulle coniche) e quelle pratiche (vedi il trattato sul taglio delle pietre). Tuttavia, come spesso accade nella scienza, le sue idee rimangono 'sommese' nei due secoli successivi, per poi tornare prepotentemente alla ribalta nell'800. La geometria proiettiva diventa il punto di partenza di una nuova teoria, la geometria algebrica, che si sviluppa nel mondo con il contributo fondamentale dei matematici italiani. Vale la pena ricordare la figura di Luigi Cremona, considerato il fondatore della cosiddetta 'Scuola italiana di Geometria' e tra gli esponenti di punta Federico Enriques, Guido Castelnuovo e Francesco Severi.

Attraverso il loro contributo viene resa esplicita la relazione profonda che sussiste tra l'algebra e la geometria e le numerose implicazioni che si hanno nello studio della geometria proiettiva.

I moderni software dedicati all'analisi e allo sviluppo di immagini e soprattutto i videogiochi, sono basati in parte sulle idee esposte da Piero della Francesca e trattate dai grandi geometri italiani nei primi anni del secolo scorso.

L'idea di fondo di questa teoria nasce dalla necessità di esplicitare gli aspetti matematici che stanno alla base della prospettiva lineare.

Per prospettiva lineare si intende la rappresentazione su un piano ottenuta come intersezione dello stesso piano con il cono che ha il vertice nell'occhio e la base nell'oggetto da raffigurare. Se consideriamo una fotografia appare evidente come essa non sia altro che una rappresentazione bidimensionale di un soggetto tridimensionale. Per codificare tale rappresentazione l'osservazione fondamentale è che la macchina fotografica non vede i punti nello spazio dove realmente essi sono, ma vede solamente la luce che essi proiettano. Pertanto la macchina fotografica identifica tutti i punti che stanno su una retta passante per l'obiettivo (che consideriamo puntiforme).



*fig. 18*

Nella figura i punti A e B vengono rappresentati dallo stesso punto C sulla pellicola della macchina fotografica.

Il pittore che vuole rappresentare fedelmente quello che vede procede in maniera del tutto analoga. Questa semplice idea racchiude in se tutti i concetti sufficienti per costruire un modello algebrico del piano proiettivo. L'oggetto che nasce non è nient'altro che una sorta di espansione del piano che rappresenta la pellicola.

Poniamo coordinate  $(x,y,z)$  nello spazio e l'occhio della fotocamera (o del pittore) nell'origine  $O=(0,0,0)$ .

Una retta passante per O e per un punto P di coordinate  $(a,b,c)$  può essere descritta parametricamente dalle equazioni:

$$x=ta$$

$$y=tb$$

$$z=tc$$

Nel nostro modello tutti i punti che giacciono sulla retta vengono rappresentati dallo stesso punto sulla superficie della pellicola. Pertanto l'idea naturale è quella di identificare tutti i punti che stanno su una retta passante per l'origine, ovvero di identificare un punto di coordinate  $(a,b,c)$  con un punto di coordinate  $(ta,tb,tc)$ .

Ad esempio le terne  $(1,2,3)$  e  $(3,6,9)$  rappresentano lo stesso punto del piano proiettivo.

Così come nel piano Cartesiano l'insieme delle coppie di numeri reali  $(x,y)$  permette di descrivere tutti i punti del piano "euclideo", in questo modo possiamo descrivere tutti i punti del piano proiet-

tivo mediante terne di numeri reali  $(x,y,z)$  con la condizione che non siano tutti e tre nulli e con l'identificazione  $(x,y,z) \sim (tx,ty,tz)$ . Queste coordinate si chiamano coordinate omogenee.

Il modello che abbiamo costruito rappresenta una sorta di “espansione” del piano euclideo nel senso che tutti i punti di coordinate  $(x,y,1)$  possono venire identificati con i punti del piano Cartesiano di coordinate  $(x,y)$ .

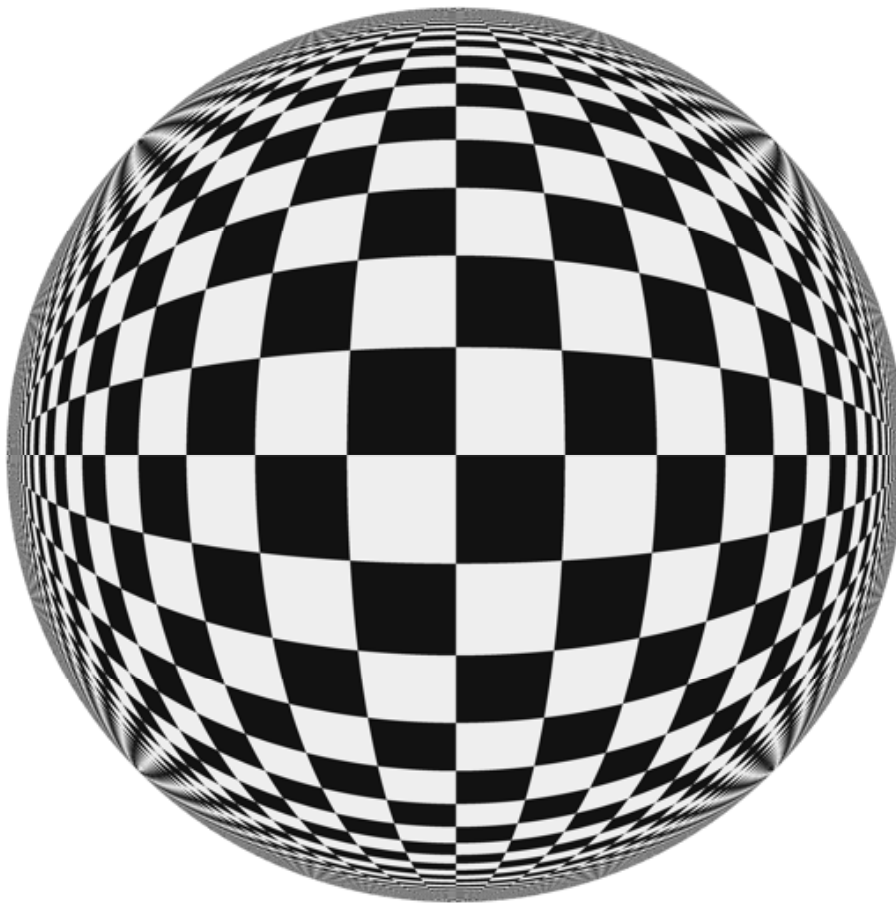
Cosa succede ai punti che sono a “90 gradi” rispetto all'occhio del fotografo ?

Questi punti non possono essere identificati con alcun punto del piano Cartesiano, poiché la retta passante per l'occhio del fotografo non interseca il piano dell'immagine. L'insieme di tutti questi punti costituisce quella che si chiama “retta all'infinito”. I punti sulla retta all'infinito hanno coordinate  $(x,y,0)$ .

In questo modo possiamo pensare al piano proiettivo come l'unione dei punti “al finito”, descritti dalle coordinate  $(x,y,1)$ , con i punti “all'infinito”, descritti dalle coordinate  $(x,y,0)$ .

Un punto all'infinito corrisponde al punto di intersezione di due rette parallele.

Una visualizzazione parziale del piano proiettivo può essere la seguente (occorre identificare i punti antipodali che stanno sul bordo per ottenere il piano proiettivo).



*fig. 19: visualizzazione (parziale) del piano proiettivo*

Il vantaggio nell'utilizzo delle coordinate omogenee risiede da un lato nella semplificazione delle procedure di calcolo necessarie per realizzare le trasformazioni del piano, e dall'altro nell'interpretazione dei punti del piano come immagine dei punti dello spazio.

Infatti un punto nello spazio di coordinate  $(x,y,z)$  lo possiamo proiettare nel piano nel punto di coordinate  $(x/z, y/z, 1)$ .

Ovvero nella tela del pittore, o ancor di più nello schermo del computer, il punto di coordinate  $(x/z, y/z)$  rappresenta l'immagine del punto dello spazio 3 dimensionale di coordinate  $(x,y,z)$ .

Le trasformazioni dei punti nello spazio, quali ad esempio traslazioni o rotazioni (movimenti tipici di un corpo rigido che si muove) vengono lette come semplici trasformazioni dei punti del piano, facilmente calcolabili con qualsiasi tipo di computer.

Analogamente, il cambiamento di punto di vista non è nient'altro che una trasformazione lineare dello spazio tridimensionale che può essere facilmente scritta mediante le coordinate (omogenee) del piano attraverso l'utilizzo di matrici.

## Parametrizzazioni nel piano proiettivo

E' possibile creare curve di interpolazione nel piano proiettivo attraverso l'uso delle coordinate omogenee. Si può pensare a una curva di questo tipo come immagine sul piano di una curva nello spazio tridimensionale.

Infatti, considerando nello spazio 3D una curva espressa mediante le equazioni

$$x=p(t)$$

$$y=q(t)$$

$$z=r(t)$$

(dove  $p(t),q(t),r(t)$  sono polinomi nella variabile  $t$ ), è facile vedere che la sua immagine nel piano è descritta dai punti di coordinate  $(x/z, y/z, 1) = (p(t)/r(t), q(t)/r(t), 1)$ .

Ovvero, identificando tali punti con i punti del piano otteniamo una parametrizzazione espressa mediante funzioni razionali (cioè frazioni di polinomi) del parametro "t".

Considerando il piano come una porzione del piano proiettivo possiamo utilizzare le coordinate omogenee. Il vantaggio delle coordinate omogenee risiede nel fatto che posso moltiplicare per il denominatore comune tutti e tre i valori delle coordinate e quindi esprimere tale punto nella forma più facilmente computabile  $(p(t), q(t), r(t))$ . Dal punto di vista computazionale è la stessa parametrizzazione della curva nello spazio, però rappresenta una curva nel piano proiettivo. Questa forma è più maneggevole dal punto di vista dei calcoli.

In effetti è possibile compiere operazioni mediante l'utilizzo di matrici ottenendo con rapidità una curva del tipo  $(p'(t), q'(t), r'(t))$ . Infatti una trasformazione della curva del piano proiettivo posso pensarla come immagine di una trasformazione della curva nello spazio.

Per rappresentarla nel piano è quindi sufficiente compiere l'operazione inversa, ovvero disegnare i punti della forma  $(p'(t)/r'(t), q'(t)/r'(t), 1)$ .

In questo modo i calcoli si fanno utilizzando tutte e tre le coordinate. Solamente alla fine si effettua la divisione per la terza coordinata ottenendo una curva che possiamo rappresentare sullo schermo del computer.

Per capire meglio questi concetti vediamo come si parametrizza la circonferenza del piano di centro l'origine e raggio 1.

Tale circonferenza ha equazione

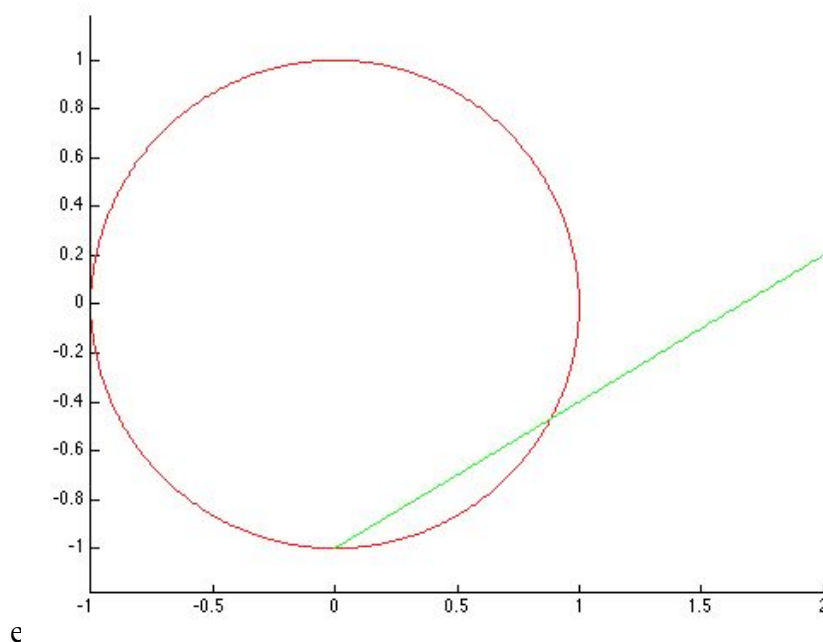
$$x^2 + y^2 = 1$$

*eq. 20*

Per parametrizzarla consideriamo un fascio di rette passanti per il punto  $Q=(0,-1)$ .

Usiamo "t" come parametro per descrivere il coefficiente angolare delle rette del fascio

Ogni retta del fascio interseca la circonferenza nel punto Q e in un altro punto P(t) che dipende dal coefficiente angolare t.



*fig. 21*



Con facili calcoli si ottiene che le coordinate  $x$  e  $y$  del punto  $P(t)$  sono espresse dalle seguenti espressioni.

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$$

*eq. 22*

In questo modo otteniamo una parametrizzazione razionale della circonferenza (senza il punto  $U$  di coordinate  $(0,1)$  che corrisponde all'intersezione con una retta parallela all'asse delle  $y$ ).

In coordinate omogenee si legge

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \\ z = 1 + t^2 \end{cases}$$

*eq. 23*

In conclusione mediante l'utilizzo di funzioni razionali (cioè di frazioni di polinomi) è possibile migliorare il livello di approssimazione di una curva interpolante e disegnare curve fondamentali come circonferenze e ellissi.

Si continua ad utilizzare polinomi, che permettono di realizzare i calcoli rapidamente, ma si riesce a realizzare un maggior numero di figure. Inoltre le parametrizzazioni in coordinate omogenee sono facilmente computabili ed è altrettanto facile modificarle mediante trasformazioni del piano.

Pertanto tali curve si prestano con molta facilità ad essere manipolate da programmi di grafica e permettono di realizzare videogiochi in cui l'immagine nello schermo si adatta immediatamente ai comandi del giocatore.

## CONCLUSIONI

Nei moderni programmi di grafica si utilizzano le curve NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines).

Le curve NURBS si ottengono mediante raffinamenti delle tecniche illustrate precedentemente.

Per realizzare queste curve si aggiungono due ulteriori passi alla realizzazione vista precedentemente. Partendo dalla curva spezzata originale, in primo luogo vengono dati dei pesi, eventualmente diversi, ai vertici della spezzata. Un peso grande significa una maggiore capacità di attrazione della curva verso siffatto vertice. In secondo luogo, per ottimizzare il calcolo del computer si percorre la curva con velocità alta nei tratti che non danno preoccupazioni (ad esempio percorsi quasi rettilinei), mentre si rallenta nei tratti in cui si ha un cambio di direzione o una curvatura alta. Questo risultato si ottiene suddividendo l'intervallo di tempo  $[0,1]$  in piccoli intervalli ciascuno di lunghezza diversa, a seconda del grado di accuratezza necessario per realizzare la porzione di curva voluta, e percorrendo tale intervallo con velocità inversamente proporzionale alla sua lunghezza.

Le idee che stanno alla base di tali procedimenti sono però le stesse utilizzate da Piero della Francesca per realizzare i suoi quadri e da Castelnuovo e Enriques per studiare le curve e le superfici algebriche.

Questo a mio giudizio è un buon esempio per evidenziare l'importanza di una solida base scientifica e culturale capace di fornire gli strumenti per affrontare le moderne tecnologie.