ESEMPIO: Piano per tre punti in coordinate omogenee

$A(1, -1, 2, 0)$ $B(0, 1, 2, 3)$ $C(2, -1, 0, 2)$

Sviluppo il determinante

Calcolare segni

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = x\left[-1(4) - 2(2+3)\right] + y\left[1(4) - 2(-6)\right]$$

$$+ z\left[1(2+3) - 1(-6)\right] + u\left[1(2) - 2(-2-2)\right]$$

$$= -14x + 16y - z - 6u = 0$$

ESERCIZI

SUI PIANI

① Scrivere l'equazione del piano // a π

$\pi)\ 2x + y - z - 3u = 0$

e passante per $(1, 2, 3, 4) = 0$

Devo cercare un piano nel fascio

$\lambda(2x + y - z - 3u) + \mu u = 0$

$\lambda(2 + 2 - 3 - 12) + 4\mu = 0$

$-11\lambda + 4\mu = 0$ $\lambda = 4$

$\mu = 11$

il piano cercato è

$8x + 4y - 4z - u = 0$

Piano per tre punti

Assegnati tre punti distinti $A(a_i)$, $B(b_i)$, $C(c_i)$ non allineati un equazione parametrica vettoriale del piano α da essi individuato è:

$$x_i = \lambda(a_i - c_i) + \mu(b_i - c_i) + c_i \qquad i = 1, 2, 3$$

segue che per ogni $x = (x_i) \in \alpha$ la quaterna

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle quaterne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a coefficienti $\lambda, \mu, 1-\lambda-\mu$

e quindi $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ y & a & b & c \\ z & a & b & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ è un piano per 3 punti se e solo se $r = 3$

I tre punti non devono essere allineati.

Equazione parametrica cercata è

$$\begin{cases} x = x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + s(y_1 - y_0) + t(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + s(z_1 - z_0) + t(z_2 - z_0) \end{cases}$$

piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$

In equazioni cartesiane diventa

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 \\ a(x_2 - x_0) + b(y_2 - y_0) + c(z_2 - z_0) = 0 \end{cases}$$

Altro modo per avere le equazioni cartesiane

facendo il det $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$

Sviluppando il determinante secondo la prima colonna trovo l'equazione

ESEMPIO

Equazione cartesiana del piano per $P_0(1,0,0)$, $P_2(0,0,1)$ e $P_1(1,1,1)$

det $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$(x-1)(-1) - y(-1) + z(-1)$

$-x + 1 + y - z = 0 \Rightarrow -x + y - z = -1$

Distanza di un punto dal piano

Sia π un piano e P_0 un punto. La distanza $d(P_0, \pi)$ fra un punto e il piano è per definizione la distanza fra P_0 e la sua proiezione ortogonale su π

$$d(P_0, \pi) = \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il punto
π ha eq. $ax + by + cz = d$

non c'è il modulo?

ESEMPIO

① Calcolare la distanza del punto $P(1, -3, 0)$ dal piano π.

$\pi)\ 4x - y + 3z + 6 = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{4 + 3 + 6}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{\cancel{13}\sqrt{26}}{\cancel{26}_{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$