SISTEMI LINEARI

La forma generale è

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{m1}x_1 + \dots & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il numero delle incognite è l'ordine del sistema. I coefficienti si possono riassumere nella matrice A

$$A \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

i numeri $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_m \end{vmatrix}$ sono i termini noti

La matrice dei termini noti più quella dei termini noti è la matrice completa

↳ il sistema $Ax = b$

- La Una soluzione è una n-upla di numeri che mi soddisfano le equazioni del sistema

Sistema possibile se ha almeno una soluzione
Sistema impossibile " nessuna soluzione
" indeterminato ~~se non~~ se ha infinite soluzioni

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite (QUADRATO) ha una sola soluzione se $\det A \neq 0$

ESEMPIO Regola di Cramer (matrice quadrata $\det A \neq 0$)
n° eq in n° incog

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$\det A = 2 + 1 = 3 \neq 0$ ha una sola soluzione

Le soluzioni — sostituisco i termini noti nella prima colonna

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+3}{3} = 1$$

la soluzione, l'unica, è $(1, 1)$

$$y = \det A_2 \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$$

CAPELLI → se possibile o no

Risoluzione dei sistemi di equazione lineari

Per una matrice generica m × n
si costruisce la matrice incompleta e la completa

Per vedere se un sistema è possibile o no si usa il teorema di Capelli
* Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia possibile è che la matrice completa e incompleta abbiano la stessa caratteristica

$\tau_i = \tau_c$ → SISTEMA POSSIBILE

Vuol dire che almeno la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle altre, la sua soppressione non altera la caratteristica

ESEMPIO Capelli (se un sistema è possibile o no)

① Riconoscere se il sistema è possibile

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & +2 & 2 \end{array}\right|$$

$\tau_i = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & +2 \end{vmatrix}$ $\tau_i = 2$

$-2 + 2 = 0 \qquad 4 + 1 = 5 \qquad -4 - 1 = -5$

$\tau_i = \tau_c$ → sistema possibile

$\tau_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\tau_c = 2$

$4 - 1 \qquad -4 + 1 \qquad -2 - 2 = 0$

② $$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right|$$

comb. lineare

non lineare

$\tau_i = 1$
$\tau_c = 2$
} sistema impossibile

② Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - z = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

$\det A = +2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$+2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(+2) + 2(-1-1) = 4 - 4 = 0$

$r_i < 3$ basta che trovo un minore 2×2 con $\det \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 \neq 0 \quad r_i = 2$

Vuol dire che una riga è combinazione lineare delle altre e la posso sopprimere

Anche la $r_c = 2$

il sistema è possibile

Per risolvere il sistema possiamo fissare z come se fosse una costante

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 - z \\ 1 & 0 & 2 + z \end{array}\right|$$

matrice quadrata con $\det A \neq 0$ → regola di cramer per ogni z fissato ho una soluzione

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-z & -2 \\ 2+z & 0 \end{vmatrix}}{2} = +\dfrac{2(2+z)}{2} \quad x = 2 + z$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2+z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{(2+z)-(1-z)}{2} = \dfrac{2+z-1+z}{2} = \dfrac{2z+1}{2} = z + \dfrac{1}{2}$

Sistemi Omogenei

Sono nella forma

$$AX = 0$$

- ammette almeno una soluzione cioè quella nulla

Quindi, per Cramer se ho una matrice quadrata e $\det A \neq 0 \rightarrow$ esiste solo una soluzione $\rightarrow$ quella nulla.

Se invece il det è $= 0$ posso avere anche più di una soluzione

ESEMPIO

① Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1(2+1) = 3 \neq 0$$

Per Cramer unica soluzione ed è quella unica che c'è sempre

② $$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\neq 0$

$$-1(-2+2) = 0$$

$$-1(-2+1) \neq 0 \quad r_A = 3$$

Siamo nel caso $r = m - 1 \rightarrow 3 = 4 - 1$
Posso sopprimere una riga

Per trovare le soluzioni
Inserisco in ultima riga A_{41} A_{42} A_{43} A_{44}

$$x = A_{41} = \det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)$$

$$y = A_{42} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$z = A_{43} = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1$$

$$t = A_{44} = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-1(-2+2) = 0$$

$$(-1, 2, -1, 0)$$