Ancora intorno a Rolle-Lagrange.

In quanto segue $f : I \to \mathbb{R}$ è definita su un intervallo aperto I e $x_0 \in I$.

Domanda: f derivabile su $I \setminus \{x_0\}$ e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$.

È vero che f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$?

Risposta: **No**. Esempio, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $x \geq 0$, $f(x) = 1$ se $x < 0$.

f non è continua in $x_0 = 0$ (con discontinuità non eliminabile) perché non esiste il $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Quindi, a maggior ragione, non è derivabile in 0.

D'altra parte, su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f è derivabile con derivata costante uguale a zero, quindi

$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Nell' esempio precedente, è essenziale che f non sia continua in $x_0 = 0$. Infatti vale il seguente:

Teorema a. $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f *continua su tutto* I *e derivabile su* $I \setminus \{x_0\}$. *Se*

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$

allora f *è derivabile in* x_0 *e* $f'(x_0) = L$. *Inoltre la funzione derivata è continua in* x_0.

Dim: Applicando Lagrange, per ogni $x \in I$, $x > x_0$, esiste $y(x) \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y(x))$$

facendo il limite per $x \to x_0^+$, si ottiene che il limite destro del rapporto incrementale è uguale a L. In modo analogo, la stessa cosa vale per il limite sinistro. Quindi $f'(x_0) = L$.

Domanda: f continua su tutto I e derivabile su $I \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che non esista il

$\lim_{x \to x_0} f'(x)$.

È vero allora che f non è derivabile in x_0?

Risposta: **No**. Esempio (già visto):

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$.

f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, in particolare $f'(0) = 0$. Ma non esiste $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Quindi la funzione derivata non è continua in 0. f non è di classe C^1.

Funzioni caratterizzate dal comportamento delle derivate

In una lezione precedente è stato mostrato che condizione necessaria e **sufficiente** affinché $f : I \to \mathbb{R}$ sia costante è che f sia derivabile su I e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. L' implicazione evidenziata non è ovvia e segue da una applicazione di Lagrange.

Questa è la **caratterizzazione differenziale** delle funzioni costanti, cioè in termini del comportamento delle derivate.

Vediamo altri esempi di funzione caratterizzate per mezzo di proprietà differenziali.

Funzioni polinomiali.

Proposizione: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione polinomiale di grado* $\leq n$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

se e solo se f *è derivabile* $(n+1)$*-volte e la derivata* $f^{(n+1)}(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Dim: Usando alcune delle regole di derivazione, è facile vedere che una funzione polinomiale di grado $\leq n$ verifica la proprietà enunciata. Vediamo l'implicazione non ovvia. Il caso $n = 0$ è quello delle funzioni costanti già visto. Consideriamo $n = 1$. Allora $f'(x)$ rientra ne caso $n = 0$, quindi $f'(x) = a_1$ per ogni x. Sia $q(x) = a_1 x$. $(f - q)' = 0$. Quindi (caso $n = 0$) $f(x) = a_0 + a_1 x$ come voluto. Il caso n arbitrario si ottiene per induzione su $n \geq 0$, applicando l'ipotesi induttiva alla funzione $f^{(n-1)}(x)$. I dettagli sono lasciati come esercizio.

Funzioni esponenziale e logaritmo.

La funzione esponenziale $\exp(x)$ verifica le seguenti proprietà strutturali (si potrebbe in effetti dimostrare che è l'unica funzione che le verifica):

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è continua bigettiva, $\exp(0) = 1$ e per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$,

$\exp(1) = e$.

Analogamente, la funzione inversa, il logaritmo $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ verifica:

$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è continua e bigettiva, $\log(1) = 0$ e per ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$,

$\log(y_1 y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)$,

$\log(e) = 1$.

Inoltre sappiamo che

$\exp'(x) = \exp(x)$, $\log'(y) = 1/y$.

Teorema b.

(1) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile,* $f(0) = 1$ *e* $f'(x) = f(x)$*. Allora* $f(x) = \exp(x)$*.*

(2) Se $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *è derivabile,* $g(1) = 0$*,* $g'(y) = 1/y$*. Allora* $g(y) = \log(y)$*.*

Dim: (1) $(f/\exp)' = 0$, $f/\exp = C$, $f = C\exp$, $1 = f(0) = C\exp(0) = C$.

(2) $(g - \log)' = 0$, $g - \log = C$, $g = \log + C$, $0 = g(1) = \log(1) + C = C$.

Supponiamo di non avere già definito exp e log con cui confrontare f e g. Usando soltanto le loro proprietà differenziali, possiamo mostrare direttamente che f e g verificano le proprietà strutturali di exp e log ricordate sopra.

Vediamo il caso del logaritmo. Fissato $z \in \mathbb{R}^+$ e facendo variare y, definiamo $h(y) = g(zy)$.

$h'(y) = z(1/zy) = 1/y = g'(y)$.

Quindi $(h - g)'(y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$, $h - g$ è una funzione costante, cioè esiste $c \in \mathbb{R}$, tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^+$, $h(y) = g(y) + c$. Per determinare la costante c, calcoliamo

$h(1) = g(z) = g(1) + c = c$, $c = g(z)$. Per l'arbitrarietà di z, abbiamo dimostrato che per ogni coppia $z, y \in \mathbb{R}^+$, $g(zy) = g(z) + g(y)$.

Dimostriamo ora che $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è bigettiva. Poiché $g'(y) = 1/y > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$, g è strettamente crescente, quindi è bigettiva sulla sua immagine. Per dimostrare che l'immagine è tutto $\mathbb{R}$ basta verificare che il suo estremo superiore è $+\infty$, mentre quello inferiore è $-\infty$.

Prendiamo $x_0 > 1$, per esempio $x_0 = 2$;

$g(2) > g(1) = 0$, $g(2^n) = ng(2) \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Quindi il sup è $+\infty$.

$0 = g(1) = g(y(1/y)) = g(y) + g(1/y)$, $g(y) = -g(1/y)$. Ponendo $t = 1/y$,

$\lim_{y\to 0^+} g(y) = -\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$.

Poniamo e_0 l'unico tale che $g(e_0) = 1$. Per chiudere il cerchio resterebbe da dimostrare che questo e_0 coincide con $e = \lim_n (1 + 1/n)^n$. Omettiamo la dimostrazione di questo punto.

Osservazione. Supponiamo di saper mostrare, non importa come, che esiste g tale che $g'(y) = 1/y$, $g(1) = 0$. Allora potremmo *definire* il logaritmo ponendo $\log(y) = g(y)$. Per quanto detto questa funzione verificherebbe tutte le propietà fondamentali del logaritmo.

Funzioni Lipschitziane.

$f : I \to \mathbb{R}$, derivabile, $J \subset I$ un sotto-intervallo di I. Supponiamo che la funzione derivata f' sia *superiormente limitata* su J. Cioè esiste $C > 0$ tale $f'(x) < C$ per ogni $x \in J$.

Per esempio, se $f(x) = \exp(x)$ questo vale su ogni semiretta $J = \{x < c\}$, prendendo $C = e^c$. Se f è C^1, cioè se f' è continua, e $J = [a, b]$ è chiuso e limitato, allora la proprietà segue da Weierstrass.

Per ogni $x < y \in J$, applicando Lagrange, esiste $z \in (x, y)$ tale che $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$, da cui

$|f(y) - f(x)| = |f'(z)||y - x|$ quindi

$|f(y) - f(x)| < C|y - x|$.

Si dice allora che f è **Lipschitziana** su J (con costante di Lip. C).

Questo ha la seguente conseguenza: per ogni $\epsilon > 0$, ponendo $\delta = \epsilon/C$, si ha che per ogni $x \in J$, per ogni $y \in J$, tale che $|y-x| < \delta$, allora $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.

Ricordiamo la definizione di f continua in x: Per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ (che dipende da ϵ e **anche** da x), tale che, se $|x - y| < \delta$, allora $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.

Vediamo sopra che se f è Lipschitziana, allora δ può essere scelto solo in funzione di ϵ ma in modo **uniforme** rispetto alla variabile x.

Polinomi e sviluppi di Taylor

Situazione: $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$, $n \geq 1$, f $(n-1)$-volte derivabile su I, con funzioni derivate successive $f^{(1)}, \ldots, f^{(n-1)}$, $f^{(n-1)}$, $f^{(n-1)}$ derivabile in x_0 con derivata $f^{(n)}(x_0)$.

Problema: studiare proprietà locali di f in un intorno di x_0 che siano conseguenza del comportamento delle derivate.

Per semplicità poniamo $x_0 = 0$. Potremo sempre ricondurci a questo caso via il cambiamento di coordinate

$x = x_0 + h$ e $g(h) := f(x_0 + h)$.

Richiami sul simbolo “**o-piccolo**”.

Sia $g : I \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$. Allora si dice che $f : I \to \mathbb{R}$ è un $o(g)$ (per $x \to 0$) se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Equivalentemente, $f(x)$ è un $o(g)$ se è della forma $f(x) = g(x)\omega(x)$, dove $\lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$.

Attenzione: Il simbolo $o(g)$ non indica una specifica funzione ma *qualsiasi* funzione che verifichi quella proprietà; $o(g)$ indica piuttosto un insieme di funzioni. Per esempio, se f è un $o(g)$, anche $-f$ è un $o(g)$ e possiamo formalmente esprimere questo dicendo che $-o(g) = o(g)$. Analogamente, $o(g) - o(g) = o(g) + o(g) = o(g)$ (non fa 0) e si legge dicendo che "la somma e la differenza di due $o(g)$ è ancora un $o(g)$".

Saremo particolarmente interessati agli $o(x^n)$, $n \geq 1$. Per esempio x^{n+1} e $\sin^{n+1}(x)$ lo sono.

Un $o(x^n)$ è un $o(x^k)$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

Un $o(\sin^k(x))$ è un $o(x^n)$: infatti un $o(\sin^n(x))$ è della forma $\sin^n(x)\omega(x)$ per qualche $\omega(x)$ che tende a 0 per per $x \to 0$. Allora

$$\sin^n(x)\omega(x) = x^n[(\sin^n(x)/x^n)\omega(x)] = x^n[\omega_1(x)]$$

$\omega_1(x) \to 0$ per $x \to 0$. Quindi un $o(\sin^n(x))$ è un $o(x^n)$.

Una funzione polinomiale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

di grado $\leq n$ *è un* $o(x^n)$ *se e solo se è la funzione costante nulla.*

Infatti, se a_0 fosse diverso da 0, allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{x^n}$$

non esiste se n è dispari oppure è $\pm\infty$ se n è pari. Poiché $a_0 = 0$

$$\frac{a_1x+\cdots+a_nx^n}{x^n} = \frac{a_1+\cdots+a_nx^{n-1}}{x^{n-1}}$$

e si conclude nello stesso modo che $a_1 = 0$, così via per induzione.

Torniamo alla f con le proprietà dette prima. Associamo ad f il **il polinomio di Taylor di ordine** n **centrato in** $x_0 = 0$ definito dalla formula

$$T_n(f,0)(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

Per esempio

$$T_3(f,0)(x) =$$

$$f(0) + f'(0)x + (1/2)f^{(2)}(0)x^2 + (1/6)f^{(3)}(0)x^3$$

T_n è l'unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ che ferifica le seguenti proprietà:

$p(0) = f(0)$,

per ogni $1 \leq j \leq n$, $p^{(j)}(0) = f^{(j)}(0)$.

Infatti se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, allora

$p(0) = a_0$, $p'(0) = a_1$, $p^{(2)}(0) = 2a_2$, $p^{(3)}(0) = 3!a_3$, $\ldots$.

Se $f(x) = p(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$, allora

$T_n(p, 0)(x) = p(x)$.

Poniamo

$R_n(f,0)(x) = f(x) - T_n(f,0)(x)$ per cui, ovviamente,

$f(x) = T_n(f,0)(x) + R_n(f,0)(x)$.

Teorema T1. (Formula di Taylor con il resto di Peano) *Il "resto" $R_n(f,0)(x)$ è un $o(x^n)$. In modo equivalente scriviamo*

$f(x) = T_n(f,0)(x) + o(x^n)$.

Dim: Per capire come funziona la cosa, cominciamo con $n = 1$. In questo caso sappiamo solo che f è derivabile in $x_0 = 0$. Allora

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

è proprio uno dei modi che abbiamo visto per esprimere questo fatto.

Vediamo $n = 2$. Vogliamo mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-(f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2}f^{(2)}(0)x^2)}{x^2} = 0.$$

Possiamo applicare L'Hospital studiando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(1)}(x)-(f^{(1)}(0)+f^{(2)}(0)x)}{2x}$$

e vediamo che ci siamo ricondotti al caso $n = 1$ (applicato alla funzione derivata $f^{(1)}$), a meno di un fattore 1/2 che è ininfluente.

Vediamo $n = 3$, vogliamo mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-(f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}x^3)}{x^3}$$

è uguale a zero. Per mostrarlo applichiamo due volte L' Hospital riducendosi alla fine al caso $n = 1$ applicato alla funzione derivata seconda $f^{(2)}$, a meno di un fattore costante non nullo che è ininfluente.

Nel caso di $n \geq 1$ arbitrario si procede per induzione, applicando $n-1$ volte L'Hospital e riducendosi al caso $n = 1$ applicato alla funzione derivata $(n-1)$-esima, $f^{(n-1)}$, a meno di un fattore costante ininfluente.

Unicità di T_n.

Proposizione. *Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi di grado $\leq n$ tali che*

$$f(x) = p(x) + o(x^n) = q(x) + o(x^n).$$

Allora, $p(x) = q(x)$.

Dim: Sottraendo le due espressioni di $f(x)$, si ottiene che il polinomio di grado $\leq n$, $p(x) - q(x)$ è un $o(x^n)$. Dunque è il polinomio nullo, cioè $p(x) = q(x)$.

Polinomi di Taylor per qualche funzione fondamentale.

$f(x) = \exp(x) = e^x$, $e^0 = 1$

$\exp'(x) = \exp(x)$. Quindi

$T_n(\exp, 0) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} x^j$

Con un piccolo abuso di notazione scriviamo:

$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + ...$

intendendo che otteniamo T_n troncando la stringa all'addendo n-esimo.

$\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$,

$\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$. Da cui, con lo stesso abuso fatto prima

$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$

Non essendoci monomi di grado pari, risulta che per ogni $n = 2k + 1$ dispari

$T_n(\sin, 0)(x) = T_{n+1}(\sin, 0)(x)$

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + ...$$

Non essendoci monomi di grado dispari, per ogni $n = 2k$ pari

$$T_n(\cos, 0)(x) = T_{n+1}(\cos, 0)(x).$$

$\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$,

$\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$.

Allora $T_n(\cosh, 0)(x)$ si ottiene da $T_n(\exp, 0)(x)$ eliminando tutti i monomi di grado dispari. Analogamente, $T_n(\sinh, 0)(x)$ si ottiene da $T_n(\exp, 0)(x)$ eliminando tutti i monomi di grado pari. Ne segue che per ogni n,

$$T_n(\exp, 0)(x) = T_n(\cosh, 0)(x) + T_n(\sinh, 0)(x)$$

$f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$,

$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$, $\ldots$.

Si dimostra per induzione che

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Quindi $f^{(k)}(0)/k! = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Con il solito abuso, scriviamo:

$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + \ldots$

$f(x) = \text{arctan}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

$f^{(2)}(x) = -2x\frac{1}{(1+x^2)^2}$, ...

da cui (usando l'induzione)

$\text{arctan}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 +$$

$$\cdots + \frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Se a è intero positivo si ritrova lo sviluppo del binomio di Newton. Formalnente vale in generale per ogni a reale.

Sui polinomi di Taylor di centro x_0 arbitrario.

Se $x_0 \neq 0$, poniamo $x = x_0 + h$, $g(h) = f(x_0 + h)$. Si ha

$g(0) = f(x_0)$, $g^{(j)}(0) = f^{(j)}(x_0)$, per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Consideriamo $T_n(g, 0)(h)$, e sostituiamo $h = x - x_0$. Otteniamo

$T_n(f, x_0) = f(x_0) + \sum_j \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$

$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

A priori, per calcolare $T_n(f,0)(x)$ occorre calcolare tutte le n derivate di $f(x)$ in $x_0 = 0$. Questo può essere pesante se n è abbastanza grande.

D'altra parte, per l'unicità di T_n, basta determinare, *non importa come*, un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ tale che $f(x) = p(x) + o(x^n)$. In tal caso $p(x)$ è il polinomio di Taylor cercato.

In certi casi, per funzioni ottenute combinando in vario modo funzioni di cui sono già noti i polinomi di Taylor, questo può essere ottenuto in modo più efficiente, *senza bisogno di calcolare tutte le derivate*.

Somma. Supponiamo che $f, g : I \to \mathbb{R}$ verifichino entrambe le solite proprientà rispetto a $x_0 = 0 \in I$.

$f(x) = T_n(f, 0)(x) + o(x^n)$,

$g(x) = T_n(g, 0)(x) + o(x^n)$. Allora

$f(x)+g(x) = (T_n(f, 0)(x)+T_n(g, 0)(x))+o(x^n)$,

perché $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

Prodotto. Con le stesse notazioni di prima, si osserva intanto che

$$f(x)g(x) = T_n(f,0)(x)T_n(g,0)(x) + o(x^n)$$

Infatti

$$f(x)g(x) = T_n(f,0)(x)T_n(g,0)(x)+$$

$$o(x^n)T_n(f,0)(x)+o(x^n)T_n(g,0)(x)+o(x^n)o(x^n)$$

e si verifica direttamente che tutti i termini dopo il primo sono degli $o(x^n)$. In generale, il polinomio prodotto $T_n(f,0)(x)T_n(g,0)(x)$ può avere grado $> n$, però tutti i monomi di grado $> n$ possono essere incorporati nel termine $o(x^n)$. Quindi $T_n(fg,0)(x)$ consiste dei monomi del polinomio prodotto di grado $\leq n$.

Composizione $f : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$, come al solito; $J = f(I)$ $y_0 = f(0)$, $g : J \to \mathbb{R}$ che verifica le solite ipotesi rispetto a y_0. Per ottenere

$$g \circ f(x) = T_n(g \circ f, 0)(x) + o(x^n),$$

l' idea è quella di sostituire

$$y = T_n(f, 0)(x) + o(x^n) \text{ in } T_n(g, y_0)(y) + o(y^n)$$

semplificando e organizzando opportunmente quello che si ottiene. Vediamo qualche esempio concreto:

$g \circ f(x) = e^{x^3}$, $y = x^3$, $y_0 = 0$

$e^y = 1 + y + y^2/2 + y^3/6 + o(y^3)$; da cui

$e^{x^3} = 1 + x^3 + x^6/2 + x^9/6 + o(x^9) = 1 + x^3 + o(x^3)$.

$g \circ f(x) = e^{\sin(x)}$, $y = \sin(x)$, $y_0 = 0$

$e^y = 1 + y + y^2/2 + y^3/6 + o(y^3)$.

$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \sin^2(x)/2 + \sin^3(x)/6 + o(\sin^3(x))$

$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$

Sostituendo, semplificando e incorporando in $o(x^3)$ i monomi di grado > 3, arriviamo a

$e^{\sin(x)} = 1 + x + x^2/2 + o(\sin^3(x)) + o(x^3)$.

Abbiamo già visto che anche $o(\sin^3(x)) = o(x^3)$. Infine

$e^{\sin(x)} = 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$.

$\frac{1}{\cos(x)}$

$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots$

$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)$

$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(-x^2/2+x^4/24+o(x^5))} =$

$= 1 - (-x^2/2 + x^4/24) + (x^4/4) + o(x^5) =$

$= 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^5).$

Usando quanto detto per il prodotto:

$\tan(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} =$

$(x - x^3/6 + x^5/120)(1 + x^2/2 + 5x^4/24) + o(x^5) =$

$x + x^3/3 + 2x^5/15 + o(x^5).$

$\log(\frac{1-x}{1+x})$

$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1-x+x^2-x^3+o(x^3)) =$

$1-2x+2x^2-2x^3+o(x^3).$

$\log(1+y) = y - y^2/2 + y^3/3 + o(y^3)$

Sostituiamo $y = -2x + 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)$

Svolgendo i conti e tenendo solo i monomi di terzo grado si ottiene infine

$log(\frac{1-x}{1+x}) = -2x - 2x^3/3 + o(x^3)$

arctan(cos(x))

Attenzione: In questa composizione

$y_0 = \cos(0) = 1.$

Quindi **non** si può usare lo sviluppo di Taylor di arctan(y) in $y_0 = 0$, occorre usare quello in $y_0 = 1$.

$\arctan(1+h) = \pi/4+h/2-h^2/4+h^3/12+o(h^3)$

$\arctan(\cos(x)) = \arctan(1 + (-x^2/2 + o(x^2))$

Sostituendo, raccogliendo ed incorporando in $o(x^3)$ i termini di grado maggiore, si ottiene infine

$\arctan(\cos(x)) = \pi/4 - x^2/4 + o(x^3)$

Applicazioni degli sviluppi di Taylor.

Studio del comportamento locale di una funzione. $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 = 0 \in I$ come al solito. Supponiamo che

$$f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \ldots f^{(n-1)}(0) = 0,$$

$$a := f^{(n)}(0) \neq 0.$$

Quindi:

$$f(x) = f(0) + (a/n!)x^n + o(x^n).$$

Distinguiamo vari casi:

$n = 2k$ è pari. Se $a > 0$, $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale. Se $a < 0$ è un punto di massimo locale. Infatti $f(x) - f(0) = x^{2k}(a/n! + \omega(x))$,

$\lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$, $\lim_{x\to 0}(a/n! + \omega(x)) = a/n!$

Poiché $x^{2k} \geq 0$, per la permanenza del segno $f(x) - f(0)$ ha localmente lo stesso segno di a.

$n = 2k + 1$ è dispari. Allora, per lo stesso argomento di prima, $f(x) - f(0)$ cambia di segno passando per 0, quindi è localmente crescente nel punto 0 se $a > 0$, localmente decrescente se $a < 0$.

La funzione costante nulla ha la proprietà di essere un $o(x^n)$ per ogni $n \geq 1$.

Domanda: La funzione nulla è caratterizzata da questa proprietà? In altre parole, se f è C^∞ e *non costante*, esiste sempre un n, tale che $f^{(n)}(0) \neq 0$?

Risposta: **No**. Esempio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = e^{-1/x}$ se $x > 0$.

Chiaramente f è C^∞ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Studiamo il comportamento in 0.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 = f(0)$

quindi f è continua in 0.

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x}/x^2 = 0$

Poiché f è continua in 0, f è derivabile in 0, $f'(0) = 0$ e la funzione derivata è continua in 0.

In modo induttivo, f è C^∞ su tutto $\mathbb{R}$, e $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$. In altre parole $f(x) = o(x^n)$ per ogni $n \geq 1$.

Applicazioni al calcolo di limiti.

Studiare il limite, di forma indeterminata 0/0

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{\log(1+x^2)-x^2}$

Poiché compaiono monomi di quarto grado, ci possiamo aspettare che sia necessario considerare polinomi di Taylor delle varie funzioni coinvolte di ordine almeno 4.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - 1 - x^2 + 5x^4 = 11x^4/2 + o(x^4)$$

$$\log(1 + x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$$

$$\log(1 + x^2) - x^2 = -x^4/2 + o(x^4)$$

Quindi siamo ridotti a studiare

$\lim_{x\to 0} \frac{11x^4/2+o(x^4)}{-x^4/2+o(x^4)} = -11.$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}e^x}{xe^x-\log(1+x^2)}$, 0/0.

$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 + o(x^2)$,

$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$

$\sqrt{1+x^2}e^x = 1 + x + o(x)$

$xe^x = x + x^2 + o(x^2)$, $\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

$xe^x - \log(1+x^2) = x + o(x)$

siamo ridotti a

$\lim_{x\to 0} \frac{-x+o(x)}{x+o(x)} = -1$.

Nello studio di un limite di funzione usando gli sviluppi di Taylor, non è chiaro a priori quanto debba essere grande l'ordine dei polinomi di Taylor. Prendendolo troppo piccolo potremmo non essere in grado di concludere. Se lo prendiamo troppo grande, facciamo un lavoro inutile. Ma non c'è una ricetta generale da applicare in modo automatico. Vediamo un semplice esempio.

Studiamo $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)+x^5}{x^3}$. L'unica funzione non polinomiale che interviene è il seno. Vediamo se basta usare il suo polinomio di Taylor di ordine 2. Otteniamo

$$\frac{x-(x+o(x^2))+x^5}{x^3} = (o(x^2)/x^2)(1/x)$$

che è una forma indeterminata 0∞. Se usiamo l'ordine 3, otteniamo

$$\frac{x-(x-x^3/6+o(x^3))+x^5}{x^3} =$$

$\frac{x^3/6+o(x^3)}{x^3}$ ed è immediato concludere che il limite cercato vale 1/6.

Se per eccesso di prudenza, avessimo usato l'ordine 5, alla fine avremmo trovato il risultato giusto, ma facendo molti calcoli inutili.

Studiare il comportamento per $n \to \infty$ della successione

$a_n = (\frac{(1+1/n)^n}{e})^n$.

È una forma indeterminata 1^∞. Usando solo gli strumenti che avevamo sviluppato all'inizio per le successioni non è molto trattabile.

Incorporiamo la successione in una funzione in modo da poter usare il calcolo differenziale:

$f(x) = e^{x \log(1+1/x)-1}$, $g(x) = f(x)^x$

$a_n = g(n)$.

Se dimostriamo che $\lim_{x\to\infty} g(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$, per il criterio 'funzioni/successioni', potremmo concludere che anche $\lim_n a_n = L$.

Applichiamo alla funzione una manipolazione usuale per le forme 1^∞ che, in ogni caso, ci porta a studiare forme indeterminate 0/0.

$g(x) = ((1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}})^{x(f(x)-1)}$

Se dimostrassimo, per esempio, che

$\lim_{x\to+\infty} x(f(x) - 1) = l \in \mathbb{R}$,

allora potremmo concludere che il limite cercato vale e^l. Studiamo quindi

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-1}{1/x}$

che è una forma indeterminata 0/0. Facciamo il cambio di variabile $t = 1/x$ riducendoci a studiare

$\lim_{t\to 0+} \frac{f(1/t)-1}{t}$

Applichiamo L'Hospital, riducendoci allo studio del rapporto delle derivate che svolgendo i conti risulta essere

$$f(1/t)(-\frac{1}{t^2}\log(1+t)+\frac{1}{t(1+t)})$$

Sappiamo che $f(1/t) \to 1$ per $t \to 0^+$. Quindi basta studiare

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{-(1+t)\log(1+t)+t}{t^2(1+t)}$$

Usiamo infine qualche sviluppo di Taylor, la funzione da studiare è della forma

$$\frac{-(1+t)(t-t^2/2+o(t^2))+t}{t^2+t^3} = \frac{t^2/2+o(t^2)}{t^2+t^3}$$

quindi il limite per $t \to 0^+$ è uguale a $l = 1/2$. Infine $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{e}$.

Sviluppi di Taylor con il resto di Lagrange. Supponiamo che la nostra funzione $f : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$ sia $(n+1)$ volte derivabile su I per cui esistono le funzioni derivate $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$. Sono ipotesi più forti di quelle usate per lo sviluppo con il resto di Peano. In queste ipotesi vale il seguente teorema

Teorema T2. *Per ogni $x \in I$, esiste c_x appartenente all'intervallo aperto di estremi* 0 *e x tale che*

$$f(x) = T_n(f,0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Osserviamo che il resto

$$\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

è un $o(x^n)$, quindi l'enunciato di T2 è compatibile con T1, la versione con il resto di Peano. Di più, T2 fornisce informazioni più precise sul resto.

Cenno di dimostrazione.

Per $n = 0$ il l'enunciato del teorema diventa

$$f(x) = f(0) + f'(c_x)x$$

che è evidentemente una riscrittura del teorema di Lagrange.

In generale poniamo

$$\phi(x) = f(x) - T_n(f, 0)(x).$$

Sappiamo che

$$\phi(0) = \phi'(0) = \cdots = \phi^{(n)}(0) = 0,$$

inoltre $\phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Si tratta di dimostrare che esiste c_x come sopra tale che

$$\phi(x)/x^n = f^{(n+1)}(c_x)/(n+1)!.$$

Questo si ottiene tramite $n + 1$ applicazioni successive del teorema di Cauchy che permettono di ricondursi al caso $n = 0$.

La versione dello sviluppo con il resto di Peano è piuttosto di natura *qualitativa*. Il resto di Lagrange permette un maggior controllo *quantitativo*. Per esempio, scriviamo lo sviluppo di $\sin(x)$ al quarto ordine; con il resto di Peano abbiamo qualitativamente che

$$R_4(\sin, 0)(x) = \sin(x) - (x - x^3/6) = o(x^4).$$

Con il resto di Lagrange abbiamo la stima quantitativa

$$|R_4(\sin, 0)(x)| = |\sin(x) - (x - x^3/6)| =$$

$$|\cos(c_x)/5!||x|^5 < |x|^5/5!$$

Asintoti all'infinito

Supponiamo che $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Una retta di equazioni

$$y = mx + p$$

è un asintoto della funzione f per $x \to \infty$, se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx + p) = 0.$$

In pratica per determinare un tale asintoto (se cè), prima si verifica se esiste $m \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = m$$

Se tale m esiste, allora p (se esiste) è dato da

$$p = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx.$$

Un caso particolare si ha quando

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = p$

In tal caso $y = p$ è detto un asintoto *orizzontale*. Altrimenti (se esiste) $y = mx + p$ è detto un asintoto *obliquo*.

Ammesso che l'asintoto esista, ci sono varie possibilità per la posizione del grafico di f rispetto alla retta asintotica, per x che tende all'infinito. Per esempio il grafico potrebbe stare definitivamente sopra o sotto la retta, oppure oscillare definitivamente sopra e sotto la retta. Dopo avere determinato l'eventuale asintoto, studiando i due limiti detti sopra, possiamo porci domande più fini riguardo alla posizione del grafico. Gli sviluppi di Taylor possono servire allo scopo. Vediamo un esempio.

$f(x) = (x^2 - 1)\log(\frac{x-1}{x+1})$, definita per $x > 1$.

Facciamo il cambiamento di variabile $t = 1/x$, riconducentoci ad una variabile che tende a 0. Studiamo quindi

$$\frac{1-t^2}{t^2}\log(\frac{1-t}{1+t})$$

in un intorno destro di 0.

Abbiamo già visto che

$$\log(\frac{1-t}{1+t}) = -2t - 2t^3/3 + o(t^3)$$

$$(1 - t^2)\log(\frac{1-t}{1+t}) = -2t + 4t^3/3 + o(t^3)$$

$$\frac{1-t^2}{t^2}\log(\frac{1-t}{1+t}) = -2/t + 4t/3 + o(t)$$

Ripristiniamo la variabile x, per $x \to +\infty$.

$$f(x) = -2x + 4/(3x) + o(1/x)$$

Allora $f(x)/x \to -2$

$f(x) + 2x \to 0$

quindi $y = -2x$ è l'asintoto di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

$f(x) + 2x = 4/(3x) + o(1/x) =$

$(1/x)(4/3 + o(1/x)/(1/x))$

Il termine in parentesi tende a $4/3 > 0$. Per la permanenza del segno, questo termine è definitivamente > 0. Anche $1/x$ lo è. In conclusione $f(x)+2x$ è definitivamente positivo, cioè il grafico di f sta definitivamente sopra la retta asintotica.