$$\begin{cases} t u' - u = c(t) \\ u(0) = e \end{cases}$$

Attenzione: non è in forma normale. Sostituendo $t=0$ otteniamo $-u(0) = c(0)$, perciò se $e \neq -c(0)$ non ci sono soluzioni.

Nel caso $e = -c(0)$, cerchiamo soluzioni così:

① Risolviamo l'equazione (senza condizione iniziale) per $t>0$ e $t<0$ (su questi domini l'equazione diventa $u' - \frac{u}{t} = \frac{c(t)}{t}$, lineare del I ordine).

② Vediamo se qualche soluzione trovata si estende e una soluzione anche in 0.

Passo ①: Visto la volta scorsa che la soluzione generale per $t \neq 0$ è

$$u(t) = kt + t \int \frac{c(t)}{t^2} dt$$

Ad esempio (visto la volta scorsa) se $c(t) = t^2$, si trovano infinite soluzioni con $u(0)=0$. $u(t) = kt + t^2$, $k \in \mathbb{R}$.

Cosa succede se $u(t) = t$?

$$\begin{cases} tu' - u = t \\ u(0) = a \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, NO soluzioni (sostituendo $t=0$, otteniamo $u(0)=0$).

Dunque studiamo

$$\begin{cases} tu' - u = t \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

soluzione per $t \neq 0$

$$u(t) = kt + t\int \frac{t}{t^2}\,dt = kt + t\int \frac{1}{t}\,dt = kt + t\log|t|.$$

$\forall k$, $\lim_{t\to 0}(kt + t\log|t|) = 0$ $\quad\left(\lim_{x\to 0} x\log|x| = 0\right)$.

Dunque $u(t) = kt + t\log|t|$ si prolunga a una funzione continua in 0 ponendo $u(0)=0$. Dunque

$$u(t) = \begin{cases} kt + t\log|t| & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

verifica $tu'(t) - u(t) = t$ $\forall t \neq 0$ ed è continua in 0.

Basta per dire che $u(t)$ risolve il problema su tutto $\mathbb{R}$?

NO: u è continua in 0, ma non è derivabile in 0, per cui $tu'(t) - u(t) = t$ non è verificata in 0.

non esiste per $t=0$

Infatti $\lim_{h\to 0} \frac{u(h)-u(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot\cancel{h} + \cancel{h}\log|h| - 0}{\cancel{h}} =$

$= \lim_{h\to 0}(k + \log|h|) = -\infty$

Dunque $\begin{cases} tu' - u = t \\ u(0) = 0 \end{cases}$ NON HA SOLUZIONI

$$\begin{cases} u' + u \cos t = \sin 2t \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Siamo tornati a un problema di Cauchy "classico", con equazione della forma $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$.

Qui $a(t) = \cos t \qquad b(t) = \sin 2t$

$A(t) = \sin t \Rightarrow$ la soluzione generale è

$$u(t) = Ke^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt =$$

$$= Ke^{-\sin t} + e^{-\sin t} \int e^{\sin t} \cdot \sin 2t\, dt$$

Concentriamoci sull'integrale. Poiché $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, l'integrale è $\int e^{\sin t} \sin 2t\, dt = 2 \int e^{\sin t} \cdot \sin t \underbrace{\cos t\, dt}_{=\, d \sin t}$

Dunque poniamo $y = \sin t$ e otteniamo $dy = \cos t\, dt$

$$2 \int e^y \cdot y \cdot dy = 2\left[e^y \cdot y - \int e^y dy\right] = 2\left[e^y y - e^y\right] =$$

$$= 2e^y(y-1) = 2e^{\sin t}(\sin t - 1).$$

$$u(t) = Ke^{-\sin t} + 2e^{-\sin t}\left[e^{\sin t}(\sin t - 1)\right] =$$

soluzioni dell'omogenea associata

$$= Ke^{-\sin t} + 2(\sin t - 1).$$

soluzione particolare

La condizione $u(0) = 0$ diventa $0 = Ke^0 + 2(0-1) = K - 2$

per cui $K=2$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = 2e^{-\sin t} + 2(\sin t - 1)$$

Ricontrolliamo: $u(0)=0$: OK

$$u' = -2\cos t\, e^{-\sin t} + 2\cos t$$

Perciò $u' + u\cos t = -2\cos t\, e^{-\sin t} + 2\cos t + \cos t\left(2e^{-\sin t} + 2(\sin t - 1)\right) =$

$$= -2\cos t\,\cancel{e^{-\sin t}} + \cancel{2\cos t} + 2\cos t\,\cancel{e^{-\sin t}} + 2\sin t\cos t - \cancel{2\cos t} = 2\sin t\cos t$$

$\square$

Si consideri
$$\begin{cases} u' - u = \dfrac{1}{t} \\ u(1) = a \end{cases}, \qquad t>0$$

① Si trovi la soluzione del problema, lasciando eventualmente indicati gli integrali che non si sanno risolvere.

② Si mostri che $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} \text{se } a > \lambda, & \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty \\ \text{se } a < \lambda, & \lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty \end{cases}$$

"effetto soglia"

③ Calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ quando $a = \lambda$.

$u' - u = \dfrac{1}{t}$ è della forma $u' - a(t)u = b(t)$ con

$a(t) = -1$, $b(t) = \dfrac{1}{t}$. Dunque $A(t) = -t$ e

$$u(t) = Ke^{t} + e^{t}\underbrace{\int e^{-t}\cdot\frac{1}{t}\,dt}_{\text{non si risolve esplicitamente}}$$

Come faccio a imporre $u(1)=a$?

Se sostituisco, $u(1)=k\cdot e^1+e^t$. ?

Devo precisare quale primitiva sto usando e, visto che la condizione iniziale ha $t_0=1$, conviene integrare a partire da 1.

$$u(t)=k e^t + e^t\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds$$

scelta furba

$$u(1)=k e^1 + e^1\underbrace{\int_1^1 \frac{e^{-s}}{s}\,ds}_{=0} = k e$$

Ponendo $u(1)=a$ otteniamo $a=k e \Rightarrow k=a e^{-1}$, da cui

$$u(t)=a\cdot e^{-1}\cdot e^t + e^t\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds =$$

$$= a e^{t-1} + e^t\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds.$$

Se $t\to+\infty$, $e^{t-1}\to+\infty$, $e^t\to+\infty$, $\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds \to I$

dove I è un numero reale positivo, in quanto l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-s}}{s}\,ds=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds$ converge (ha integrando >0 e $\frac{e^{-s}}{s}\leq e^{-s}$ $\forall s\geq 1$, e $\int_1^{+\infty} e^{-s}ds<+\infty$).

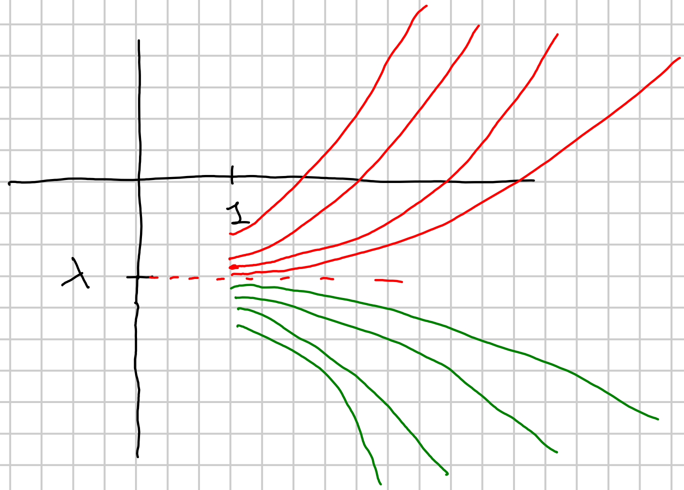
$$u(t)=e^t\left(a\cdot e^{-1}+\int_1^t \frac{e^{-s}}{s}\,ds\right)$$, per $t\to+\infty$,

tende a $+\infty\,(a e^{-1}+I)$

Dunque, se $a e^{-1}+I>0$, cioè $a>-eI$, $u(t)\to+\infty$

se $ae^{-1}+I<0$, cioè $a<-eI$, $u(t)\to-\infty$

Dunque abbiamo dimostrato (2) con $\lambda=-eI$



(3) Se $a=\lambda=-Ie$,

$$u(t)=e^{t}\left(a\cdot e^{-1}+\int_1^t\frac{e^{-s}}{s}\,ds\right)=$$

$$=\underbrace{e^{t}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{-I+\int_1^t\frac{e^{-s}}{s}\,ds}_{\to 0}\Big)=\frac{-I+\int_1^t\frac{e^{-s}}{s}\,ds}{e^{-t}}$$

forma $\frac{0}{0}$ per $t\to+\infty$

Usando L'Hôpital, ottengo

$$\left(-I+\int_1^t\frac{e^{-s}}{s}\,ds\right)'=\frac{e^{-t}}{t}$$ per il Teorema fondamentale del Calcolo

$$\lim_{t\to+\infty}u(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{e^{-t}}{t}}{-e^{-t}}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{1}{t}=0$$

Ex.: Si determini una funzione $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che

$$u''+4u'-5u=0 \quad e \quad \int_0^{+\infty}u(t)\,dt=5.$$

È un'equazione lineare omogenea a coeff. costanti con polinomio caratteristico x^2+4x-5, che ha radici

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$. Dunque la soluzione generale è

$a e^{t} + b e^{-5t}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Cerco a, b tali che

$$\int_0^{+\infty} \left(a e^{t} + b e^{-5t} \right) dt = 5$$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{t} = +\infty$ (ovvio) $\int_0^{+\infty} e^{-5t}\, dt = \lim_{t \to +\infty} \int_0^{t} e^{-5s}\, ds =$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{5} e^{-5s} \right]_0^{t} = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}$$

Dunque, se $a \neq 0$, $\int_0^{+\infty} \left(a e^{t} + b e^{-5t} \right) dt = (a \cdot +\infty) + b \cdot \frac{1}{5} = \pm\infty$

(a seconda del segno di a). Dunque necessariamente $a = 0$,

$u(t) = b e^{-5t}$ e $\int_0^{+\infty} u(t)\, dt = \frac{b}{5}$. Perciò, ponendo

$\frac{b}{5} = 5$, ottengo $b = 25$ e la funzione richiesta è

$u(t) = 25 e^{-5t}$.

$$\begin{cases} u' = u^2 + 2tu + t^2 \\ u(0) = a \end{cases}$$

Suggerimento: si ponga $v = u + t$ e si studi se v soddisfa qualche eq. diff.

Come equazione in u, questa non ricade in nessuna classe studiata: è del I ordine, ma non è lineare (compare u^2) né a variabili separabili.

Proviamo con il suggerimento. Notiamo che l'equazione è $u' = (u+t)^2$. Posto $v = u + t$, ottieni $v' = u' + 1$

$(v(t) = u(t) + t \Rightarrow v'(t) = u'(t) + 1 \quad \forall t)$

$u' = (u+t)^2 \qquad v = u+t, \quad v' = u'+1$

Dunque $v' = u'+1 = (u+t)^2+1 = v^2+1$, $\boxed{v' = v^2+1}$

variabili separabili

Se $v \equiv k$, $v' \equiv 0$ e $0 = k^2+1$ non ha soluzioni

$\Longrightarrow$ no soluzioni costanti

$$\frac{dv}{dt} = v^2+1 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2+1} = dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2+1} = \int dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \arctan v = t+k \Longrightarrow v = \tan(t+k)$$

Se $u(0) = a$, $v(t) = u(t)+t \Rightarrow v(0) = u(0)+0 = a$

$a = \tan(0+k)$, $k = \arctan a \Rightarrow v(t) = \tan(t+\arctan a)$

Ove $u(t) = v(t) - t = \tan(t+\arctan a) - t$

Per $a = 0$, otteniamo $u(t) = (\tan t) - t$, definita in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.