Equazioni differenziali

Consideriamo una funzione

$F : T \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

dove T, I sono intervalli aperti, $n \geq 1$

A volte scriviamo

$(t, x, x_1, \ldots, x_n) := (t, \bar{x})$.

L' **equazione differenziale** associata alla funzione $F(t, \bar{x})$ è della forma

$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$

Una soluzione dell'equazione differenziale consiste in una funzione

$x : J \to I$

derivabile n volte, definita su un intervallo aperto

$J \subset T$

tale che per ogni $t \in J$,

$F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$

Attenzione: *L'intervallo di definizione della funzione $x = x(t)$ è parte delle incognite del problema, non è dato a priori.*

Il numero n è detto **l'ordine** dell'equazione (è il massimo ordine delle derivate che sono coinvolte).

Se $x : J \to I$ è una soluzione dell'equazione differenziale associata alla funzione $F(t, \bar{x})$ e

$J' \subset J$

è un sotto-intervallo aperto, allora anche la restrizione di x a J' è una soluzione.

Questo suggerisce di considerare le

soluzioni massimali

cioè quelle che non possono essere estese ad un intervallo più grande.

L'integrale totale $I(F)$ di una equazione differenziale (associata alla funzione F) è, per definizione, *l'insieme delle sue soluzioni massimali*. Il problema generale è quello di determinare $I(F)$ al variare di F, in particolare determinare se non è vuoto.

Ci possiamo aspettare che la difficoltà del problema cresca al crescere dell'ordine n e dipenda da quanto è "complicata e/o regolare" la funzione $F(t, \bar{x})$.

Nozioni relative alle equazioni differenziali

1) Se $x : J \to I$ è come sopra una soluzione (massimale) di una equazione differenziale, allora il suo *grafico*

$$G(x) = \{(t, x(t)) \in J \times I\}$$

è detto una **curva integrale** (massimale) della equazione differenziale; c'è una corrispondenza biunivoca naturale tra soluzioni e curve integrali. A volte le curve integrali sono geometricamente più espressive.

2) Una equazione differenziale di ordine n è

in forma normale

se è della forma

$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$

cioè $F(t, \bar{x})$ è della forma

$F(t, \bar{x}) = x_n - f(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1})$

Esempi:

$x'' = (x')^2 + \cos(t)$ è del secondo ordine in forma normale.

$(x'')^2 + x + \cos(t) = 0$ è del secondo ordine **non** in forma normale.

$T = I = \mathbb{R}$ in entrambi i casi.

Se $F(t, \bar{x}) = F(\bar{x})$, cioè il suo valore non dipende dalla variabile t, allora l'equazione differenziale associata è detta **autonoma**.

Esempi:

$x'' = x'$ è del secondo ordine in forma normale e autonoma.

$x'' = \cos(t)x$ è del secondo ordine in forma normale e **non** autonoma.

Osservazioni:

(1) L'uso del nome t per la variabile nell'intervallo T è allusivo ad un qualche modello

cinematico/dinamico

di moto rettilineo. Possiamo interpretare T come un intervallo di **tempi**, mentre la variabile x indica la **posizione** di un punto che si muove sull'intervallo I.

Supponiamo, per esempio, che l' equazione sia del primo ordine e in forma normale:

$x' = f(t, x)$.

Una soluzione (massimale) $x : J \to I$ è allora una **legge del moto** che specifica la posizione del punto ad ogni istante $t \in J$. La dervata $x'(t)$ è la **velocità** (vettoriale) del moto all'istante t e prende il valore assegnato $f(t, x)$.

In altre parole, la funzione $f(t, x)$ è un "campo di vettori" tangenti a I dipendente dal tempo cioè associa ad ogni posizione $x \in I$ un vettore tangente a I che varia nel tempo. Una soluzione $x = x(t)$ *integra* quel "campo di vettori" nel senso che istante per istante lo realizza mediante i vettori velocità del moto.

L' equazione è autonoma se è della forma

$$x' = f(x)$$

cioè il campo di velocità dipende solo dalla posizione ed è costante nel tempo.

Se l'equazione è del secondo ordine, $n = 2$, in forma normale

$$x'' = f(t, x, x')$$

allora $x''(t)$ è l'**accelerazione** (vettoriale) del moto all' istante t.

Una *legge fondamentale della dinamica* per i moti rettilinei si puo' formulare mediante equazioni del secondo ordine in forma normale del tipo

$$x'' = f(t, x, x')/m$$

dove $f(t, x, x')$ è un campo di **forze** (vettoriali, tangenti a I) applicate ad ogni posizione $x \in I$, dipendente dal tempo e dalla velocità del moto in x istante per istante; m è la **massa** del punto materiale.

Se l'equazione è autonoma

$$x'' = f(x, x')/m$$

allora il campo di forze dipende solo dalla posizione e dalla velocità istantanea ed è costante nel tempo.

Risolvere tali equazioni significa determinare le leggi del moto le cui accelerazioni eguagliano istante per istante il corrispondente campo di forze (normalizzato dividendo per la massa).

(2) D'altra parte, l'uso di questi nomi per le variabili non è rigido. A volte scriveremo $F(t, \bar{u})$, $F(x, \bar{y})$ etc.

Inoltre le equazioni differenziali appaiono anche in contesti non cinematici/dinamici. Ecco alcuni esempi.

Decadimento radioattivo. Una sostanza radioattiva contiene $N(t)$ atomi all'istante t. Il numero di atomi che si disintegrano nell'unità di tempo è proporzionale a $N(t)$, quindi possiamo modellizzare la situazione mediante l' equazione

$N' = -aN$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

dove il coefficiente a è caratteristico della sostanza.

Evoluzione di una popolazione. Sia $p(t)$ la popolazione di una specie, funzione del tempo. La *Legge di Maltus* modellizza la situazione con l'equazione

$$p' = ap(t)$$

dove a è un coefficiente che tiene conto del numero delle nascite e dei decessi nell'unità di tempo e si suppone indipendente dal tempo.

La *Legge di Verhulst* tiene conto del fatto che se la popolazione diventa molto grande (se $a > 0$) altri fattori intervengono quali lo spazio vitale, la penuria di risorse, quindi modifica il modello di Maltus mediante l' equazione

$$p' = ap - bp^2$$

con $b > 0$ ma piccolo rispetto ad $a > 0$.

In tutti i casi è interessante studiare l'evoluzione della popolazione a partire da una popolazione iniziale $p(t_0)$.

Osservazione. I tutti gli esempi fatti si ha comunque a che fare con grandezze che evolvono nel tempo. Ci sono esempi di natura geometrica in cui nessuna delle variabili è un "tempo". Per esempio, nel piano con coordinate (x, y) si considerino le funzioni $y = y(x)$ tali che

$$y' = -x/y,\ y \neq 0$$

vedremo più avanti che le soluzioni di questa equazione sono strettamente legate alla famiglia di circonferenze

$$x^2 + y^2 = C^2,\ C \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ancora il caso di ordine 1 in forma normale

$$x' = f(t, x)$$

ed esprimiamo quanto detto prima in termini delle *curve integrali*. Associamo alla funzione

$$f : T \times I \to \mathbb{R}$$

la funzione

$$S : T \times I \to \mathbb{R}^2, \ S(t, x) = (1, f(t, x))$$

che può essere interpretata come un *campo di vettori tangenti* sullo “spazio-tempo” $T \times I$, che dipende solo dalla “posizione” in questo spazio-tempo.

Il vettore $S(t,x) = (1, f(t,x))$ è pensato "applicato" al punto $(t,x) \in T \times I$. Se $x : J \to I$ è una soluzione (massimale) dell'equazione differenziale, allora la parametrizzazione naturale della corrispondente curva integrale

$$J \ni t \to (t, x(t)) \in G(x)$$

è la legge del moto di un punto che si muove nel piano lungo tale curva.

$$v(t) := (1, x'(t)) \in \mathbb{R}^2$$

è il vettore velocità di questo moto all'istante $t \in J$, è tangente alla curva integrale $G(x)$ nel punto $(t, x(t))$ e coincide con il vettore $S(t, x(t))$.

Un esempio già familiare:

$f(t, x) = f(t)$

cioè dipende solo dal tempo ma non dalla posizione. In questo caso l'equazione differenziale è $x' = f(t)$.

il suo integrale totale coincide con l'integrale indefinito $\int f(t)dt$.

Possiamo dire che le equazioni differenziali sono una generalizzazione molto vasta dell' integrale indefinito

Supponiamo che f sia continua. Allora, per ogni $t_0 \in T$, la funzione integrale

$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(y)dy$

è una soluzione necessariamente massimale perché *è definita su tutto* T. Lo stesso vale per tutte le altre soluzioni (cioè le primitive) che sono della forma $x(t) + C$.

Il campo $S(t,x)$ applica lungo ogni intervallo verticale $t = t_0$ di $T \times I$ il vettore costante $(1, f(t_0))$.

Le corrispondenti curve integrali si ottengono traslando verticalmente il grafico $G(x)$ (x come sopra) e sono due a due disgiunte. Imponendo

$$(t_0, x_0) = (t_0, x(t_0) + C) = (t_0, C)$$

si ricava $C = x_0$. Così

Per ogni $(t_0, x_0) \in T \times I$ esiste un'unica soluzione massimale, definita su tutto T, che verifica la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. In altre parole esiste in $T \times I$ un'unica curva integrale massimale G che passi per il punto (t_0, x_0).

Problema di Cauchy

Sia $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$ un'equazione differenziale di ordine n in forma normale.

Una **condizione iniziale** per l'equazione è un punto della forma

$(t_0, x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in T \times I \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Fissata tale condizione iniziale il *problema di esistenza (e unicità) di Cauchy* chiede se esiste (e, ammesso che esista, se è unica) una soluzione massimale dell' equazione

$x : J \to I$

tale che $t_0 \in J$ e

$(x(t_0), x^{(1)}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) =$

$(x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$

Problema dell' esistenza (e unicità) delle soluzioni con condizioni iniziali assegnate

Determinare condizioni sufficienti (e non troppo restrittive) sulla funzione

$f(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1})$

affinché per ogni condizione iniziale, il corrispondente problema di esistenza (e unicità) di Cauchy ammetta soluzioni.

Commento: *"Esistenza e unicità - determinismo" ....*

Digressione sulla regolarità delle funzioni di più variabili

Sia $f : T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ come al solito.

$T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Per estendere la nozione di **continuità** basta disporre di una nozione di intorno di ogni punto $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ che estenda gli $I(y, \epsilon)$ del caso di una variabile.

Poniamo allora $B(y, \epsilon)$ la *palla aperta* di $\mathbb{R}^{n+1}$ centro y e raggio $\epsilon > 0$

$B(y, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1};$

$||x - y|| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (x_j - y_j)^2} < \epsilon\}$

Equivalentemente possiamo usare come intorni di y i *multi-quadrati* aperti della forma

$$Q(y, \epsilon) := I(y_1, \epsilon) \times I(y_2, \epsilon) \times \cdots \times I(y_{n+1}, \epsilon)$$

Usando questi intorni possiamo copiare ed estendere la definizione di continuità in un punto e poi di continuità globale.

La trattazione delle funzioni *differenziabili* di più variabili è più laboriosa e sarà affrontata in corsi futuri. Qui ci limitiamo a dare una nozione “operativa” di funzione C^1.

Sia $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Comunque fisso il valore di n variabili e faccio variare quella residua, diciamo sia y_j, ottengo una funzione di una variabile. Diciamo allora che g è di classe C^1 se è

(1) g è continua;

(2) Comunque mettiamo in opera la procedura descritta sopra, otteniamo una funzione derivabile della variabile y_j.

(3) Facendo variare le altre n-variabili otteniamo la funzione *derivata parziale* j*-esima*

$\partial_j(g) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

e richiediamo che per ogni $j = 1, \ldots, n + 1$, queste derivate parziali siano funzioni continue.

Sia $f : T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ come al solito.

Diciamo che essa verifica la **condizione C-L** se è continua e per ogni $(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ esistono $L > 0$ e un multi-quadrato chiuso

$Q := [t - \epsilon, t + \epsilon] \times [x - \epsilon, x + \epsilon] \times \cdots \times [x_{n-1} - \epsilon, x_{n-1} + \epsilon] \subset$

$T \times I \times \mathbb{R}^{n-1}$

tali che per ogni coppia di punti di Q del tipo $(s, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$, $(s, z, z_1, \ldots, z_{n-1})$ si abbia

$|f(s, \bar{y}) - f(s, \bar{z})| <$

$L \max\{|y - z|, |y_j - z_j|,\ j = 1, \ldots, n - 1\}$

Questo estende la nozione già vista di funzione Lipschitziana di una variabile. Possiamo dire che f è *localmente Lipschitziana nelle variabili* $\bar{x}$.

Si può dimostrare:

Se f *è* C^1 *allora verifica la condizione C-L.*

Già visto per le funzioni di una variabile usando il teorema di Lagrange.

Possiamo ora enunciare (senza dimostrazione) due teoremi che rispondono ai problemi di Cauchy.

Teorema di esistenza:

Se $f : T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *è* **continua**, *allora per ogni condizione iniziale*

$$(t_0, x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in T \times I \times \mathbb{R}^{n-1},$$

esiste una soluzione massimale

$$x : J \to I$$

dell'equazione differenziale

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$$

tale che $t_0 \in J$ *e*

$$(x(t_0), x^{(1)}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) =$$

$$(x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$$

Teorema di esistenza e unicità:

Se $f : T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *verifica* **la condizione C-L**, *allora per ogni condizione iniziale*

$$(t_0, x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in T \times I \times \mathbb{R}^{n-1},$$

esiste ed è **unica** *la soluzione massimale*

$$x : J \to I$$

dell'equazione differenziale

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$$

tale che $t_0 \in J$ *e*

$$(x(t_0), x^{(1)}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) =$$

$$(x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$$

Equazioni differenziali lineari

È la classe di equazioni differenziali più semplici.

Per definizione, un'equazione differenziale lineare di ordine n in forma normale normale è del tipo

$a_0(t)x + a_1(t)x^{(1)} + .. + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + x^{(n)} = b(t)$

cioè è associata alla funzione

$F(t, \bar{x}) = a_0(t)x + \ldots a_{n-1}(t)x_{n-1} + x_n - b(t)$

definita su $T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Richiediamo inoltre che le funzioni $a_j(t)$ e $b(t)$ siano *continue*. Allora *la condizione C-L è verificata e possiamo applicare il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.*

Una equazione lineare è detta **omogenea** se $b(t)$ è la funzione costante nulla. Altrimenti l'equazione è **non omogenea** e la funzione non costantemente nulla $b(t)$ è detta a volte il **termine noto** dell' equazione. Se l' equazione non è omogenea, sostituendo il termine noto con la funzione costante nulla, otteniamo **l' equazione omogenea associata**.

Stuttura delle soluzioni di una equazione lineare omogenea

Consideriamo l'equazione lineare omogenea di ordine n

$$a_0(t)x+a_1(t)x^{(1)}+..+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+x^{(n)}=0$$

L' insieme $V = V(T)$ delle soluzioni definite su tutto T **non è vuoto**. Infatti la funzione costante nulla ($x(t) = 0$ per ogni t) è una soluzione.

Teorema L1 *V è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale: se u, v sono soluzioni allora $w = u + v$ è una soluzione; per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, λu è una soluzione.*

Dim. Ponendo $x^{(0)} = x$, $a_n = 1$, l'equazione può essere riscritta nella forma

$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} = 0$

Per ogni $t \in T$, per la linearità della derivata

$\sum_k a_k(t)w^{(k)}(t) = \sum_k a_k(t)(u^{(k)}(t) + v^{(k)}(t)) =$

$\sum_k a_k(t)u^{(k)}(t) + \sum_k a_k(t)v^{(k)}(t) = 0 + 0 = 0.$

L'altra verifica è simile.

Osservazione. In generale le soluzioni massimali garantite dal teorema di esistenza e unicità sono definite su sottointervalli **propri** J di T (vedremo in seguito degli esempi). D'altra parte, nel caso delle equazioni lineari omogenee vale il seguente fatto più forte (senza dimostrazione):

Per ogni condizione iniziale all'istante $t_0 \in T$*, la soluzione massimale unica che la realizza (secondo il teorema di esistenza e unicità) è definita su tutto l'intervallo* T*.*

Con le stesse ipotesi del Teorema L1.

Teorema L2. *Lo spazio vettoriale V ha dimensione* $\dim V = n$. *Più precisamente, sia $t_0 \in T$ e siano $u_j : T \to \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n-1$, le uniche soluzioni che realizzano rispettivamente le n condizioni iniziali all'istante t_0:*

$$C_0 = (1, 0, \dots, 0), C_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$$

$$\dots, C_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Allora queste soluzioni formano una **base** *dello spazio vettoriale V.*

Dim. Per ogni arbitraria condizione iniziale $C = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ all'istante t_0, la combinazione lineare

$\sum_{k=0}^{n-1} b_j u_j \in V$ e realizza C.

Quindi le n-soluzioni u_j **generano** V.

D'altra parte, se per ogni $t \in T$

$u(t) := \sum_{k=0}^{n-1} b_j u_j(t) = 0$

Allora, per ogni k,

$0 = u^{(k)}(t_0) = b_k$

quindi le u_j sono linearmente indipendenti.

Sull'integrale totale delle equazioni lineari non omogenee

Se u_0 *è una soluzione dell'equazione lineare non omogenea*

$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$

allora l'integrale totale dell'equazione è

$u_0 + V(T)$

dove $V(T)$ *è lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata.*

Dim. Se u è un'altra soluzione allora

$\sum_k a_k(t)(u - u_0)^{(k)}(t) =$

$\sum_k a_k(t)(u)^{(k)}(t) - \sum_k a_k(t)(u_0)^{(k)}(t) =$

$b(t) - b(t) = 0$ per ogni t;

cioè $u - u_0 \in V$.

Con verifica simile si mostra che se $z \in V$, allora

$\sum_k a_k(t)(u_0 + z)^{(k)}(t) = b(t) + 0 = b(t)$.

In pratica la determinazione dell' integrale totale di una equazione lineare non omogenea si può spezzare in due passi:

• *Determinare una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell' equazione omogenea associata*.

• *Determinare (in qualche modo) una soluzione particolare dell' equazione non omogenea.*

Equazioni lineari del primo ordine

Si tratta di studiare equazioni della forma

$x' + a(t)x = b(t)$

dove $(t, x, x_1) \in T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e le funzioni

$a, b : T \to \mathbb{R}$

sono funzione continue.

$x' + a(t)x = 0$

è l'equazione *omogenea* associata.

Mettiamo in pratica lo schema enunciato prima.

Cerchiamo prima una base di V. Sappiamo che $\dim V = 1$.

Cerchiamo poi una soluzione particolare u_0 dell' equazione non omogenea, in modo che l' integrale totale dell' equazione data sarà

$$u_0 + V$$

Fissiamo una primitiva $A(t)$ della funzione $a(t)$. In certi casi specifici potrà essere determinata esplicitamente. In generale possiamo sempre esprimerla nella forma di una funzione integrale di centro $t_0 \in T$

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(y)dy$

$x : T \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione omogenea se e solo se per ogni $t \in T$

$e^{A(t)}(x'(t) + a(t)x(t)) = 0$

che possiamo riscrivere nella forma

$(x(t)e^{A(t)})' = 0$

da cui si ricava che

$x(t) = Ce^{-A(t)}$

per qualche $C \in \mathbb{R}$. Quindi $e^{-A(t)}$ è una base di V. Notare che questo conferma il Teorema L2 ma è stato ottenuto direttamente, senza utilizzare il teorema generale.

Determiniamo ora una soluzione particolare dell' equazione non omogenea iniziale. La cerchiamo della forma

$$u_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

dove $C : T \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile. Si dice che la stiamo cercando con il "*metodo della variazione della costante*".

Derivando

$$u_0'(t) = (C'(t) - a(t)C(t))e^{-A(t)}$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene che basta imporre

$$C'(t) = e^{A(t)}b(t)$$

cioè basta prendere come $C(t)$ una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$. A volte questa potrà essere ottenuta in modo esplicito. Può essere sempre definita come una funzione integrale.

$$u_0(t) = (\int_{t_0}^{t} e^{A(y)}b(y)dy)e^{-A(t)}$$

Esempio.

$x' - \tan(t)x = \cos(t)$, $T = (-\pi/2, \pi/2)$.

$(\log(\cos(t)))' = -\tan(t)$

quindi l' integrale totale dell' equazione omogenea è

$x(t) = \frac{C}{\cos(t)}$, $C \in \mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell' equazione non omogenea è

$u_0(t) = (\int_0^t \cos^2(y)dy)\frac{1}{\cos(t)} =$

$(t/2 + \sin(2t)/4)\frac{1}{\cos(t)}$

Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine arbitrario

Definiamo intanto il caso **omogeneo**. Si considera un polinomio monico di grado n a coefficienti reali

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

$$a_n = 1$$

I coefficienti possono essere considerati come funzioni costanti definite su tutto $\mathbb{R}$. Associamo a questo polinomio l'equazione lineare omogenea

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = 0$$

$p(X)$ è detto il *polinomio caratteristico* dell' equazione.

Una equazione **non omogenea** è della forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = b(t)$$

dove b è definita su qualche intervallo T ed è continua.

Per l'unicità delle soluzioni, lo spazio $V(T)$ delle soluzioni dell'omogenea associata è dato dalla restrizione su T dello spazio $V = V(\mathbb{R})$ delle soluzioni dell'equazione su tutto $\mathbb{R}$.

Secondo lo schema generale, studiamo prima le equazioni omogenee (su tutto $\mathbb{R}$).

Le soluzioni di tali equazioni sono di classe C^∞

Dim. Se $x(t)$ è una soluzione allora

$x^{(n)}(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t)$

da cui si deduce che la funzione $x^{(n)}$ e derivabile e si conclude poi per induzione.

Possiamo allora riformulare lo studio dell'equazione omogenea nel modo seguente. Sia

$$\mathcal{E} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; u \ C^\infty\}$$

è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale (di dimensione infinita).

Sia $D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $D(u) = u'$

per la linearità della derivata, D è una *applicazione lineare*.

Definiamo

$p(D) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$p(D) := a_0\mathrm{Id}+a_1 D+a_2 D^2+\cdots+a_{n-1}D^{n-1}+D^n$

dove $D^2 = D \circ D$, $D^3 = D \circ D \circ D$, etc.

Ogni D^s è lineare in quanto composizione di applicazioni lineari. $p(D)$ è lineare in quanto combinazione lineare di applicazioni lineari.

Allora $x \in \mathcal{E}$ è una soluzione dell'equazione se e solo se

$p(D)(x) = 0$ cioè

$x \in \ker(p(D))$

Sappiamo dall' algebra lineare che il nucleo di una applicazione lineare è uno (sotto-)spazio vettoriale; questo conferma Teorema L1 nel caso in questione.

Basi di V quando il grado del polinomio caratteristico è minore o uguale a 2

Se il grado di $p(X)$ è 1, $p(x) = X-\lambda$, l'equazione

$$x' = \lambda x$$

è un caso particolare di quanto già visto ed una base di V è la funzione

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Oscillatore armonico

Il caso con polinomio caratteristico di grado 2 è particolarmente importante perché interviene nella modellizzazione di molti fenomeni fisici (in senso lato).

Esempi.

(1) Un punto materiale di massa m si muove sulla retta con posizione $x(t)$ sottoposto ad una forza di richiamo $-kx$, $k > 0$ ed a una forza di attrito proporzionale alla velocità, $-ax'$, $a \geq 0$. Allora la sua legge del moto è una soluzione dell' equazione lineare omogenea

$$mx'' + ax' + kx = 0$$

Se il punto è soggetto anche ad una forza esterna di 'pulsazione' ω allora l'' equazione diventa non omogenea della forma

$$mx'' + ax' + kx = A \sin(\omega t)$$

(2) Un circuito elettrico è costituito di una resistenza R, una capacità C e tensione di sicurezza L. Allora l'intensità di corrente $i(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea

$$Li'' + Ri + i/C = 0$$

Se il circuito è alimentato da una corrente alternata di pulsazione ω, l'equazione diventa della forma

$$Li'' + Ri + i/C = A \sin(\omega t)$$

Modelli di questo tipo sono genericamente chiamati "*oscillatori armonici*"

Se il grado è 2,

$p(x) = a_0 + a_1 X + X^2$

e come al solito abbiamo tre possibiltà a seconda del segno del Δ.

$\Delta > 0$, $p(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$, $\lambda \neq \mu$.

$p(D) = (D - \lambda \mathrm{Id}) \circ (D - \mu \mathrm{Id}) =$

$(D - \mu \mathrm{Id}) \circ (D - \lambda \mathrm{Id})$

Se $x \in \ker(D - \lambda \mathrm{Id}) \cup \ker(D - \mu \mathrm{Id})$

allora $x \in \ker(p(D))$.

Ne segue che

$x_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, $x_\mu(t) = e^{\mu t}$

sono soluzioni dell' equazione differenziale.

Sono linearmente indipendenti e quindi formano una base cercata di V.

Infatti se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t} = 0,$$

derivando otteniamo che per ogni t

$$\lambda c_1 e^{\lambda t} + \mu c_2 e^{\mu t} = 0$$

Moltiplicando la prima relazione per λ e facendo la differenza, si ha che per ogni t

$$c_2(\lambda - \mu) e^{\mu t} = 0$$

poiché $\lambda - \mu \neq 0$, ne segue che $c_2 = 0$ e poi che $c_1 = 0$.

l'integrale completo dell'equazione lineare omogenea è

$$V = \{c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\Delta = 0$, $p(X) = (X - \lambda)^2$,

$p(D) = (D - \lambda \mathrm{Id})^2 = (D - \lambda \mathrm{Id}) \circ (D - \lambda \mathrm{Id})$

$x_1(t) = e^{\lambda t}$, $x_2(t) = te^{\lambda t}$

sono soluzioni dell'equazione.

È una verifica diretta.

Sono indipendenti

Se per ogni t, $(c_1 + tc_2)e^{\lambda t} = 0$

allora per ogni t

$c_1 + tc_2 = 0$ da cui $c_1 = c_2 = 0$.

$V = \{c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

$\Delta < 0$, $p(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = q_\alpha(X)$,

$\alpha = a + ib$, $b \neq 0$

L'idea è di trattare questo caso come quello per cui $\Delta > 0$, una volta che la situazione sia stata opportunamente *complessificata*.

Poniamo

$$\mathcal{E}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E} + i\mathcal{E} := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; u = x + iy, x, y \in \mathcal{E}\}$$

$\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale;

$$u_1 + u_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Per $\beta = p + iq \in \mathbb{C}$,

$$\beta u := (px - qy) + i(qx + py)$$

$\bar{u} := x - iy$, $\mathcal{E} = \mathcal{E} + i0 = \{u = \bar{u}\}$

$D_{\mathbb{C}} : \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$, $D_{\mathbb{C}}(u) = D(x) + iD(y)$

è $\mathbb{C}$-lineare.

$$p(D_{\mathbb{C}}) : \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$$

$$V = \ker(p(D)) = \{u \in \ker(p(D_{\mathbb{C}})); u = \bar{u}\}$$

Per ogni $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta = p + iq$,

$e^{\beta t} = e^{pt}(\cos(qt) + i \sin(qt))$, $(e^{\beta t})' = \beta e^{\beta t}$

Adattando direttamente quanto fatto quando $\Delta > 0$, abbiamo che

$\{e^{\alpha t}, e^{\bar{\alpha} t}\}$ *è una base di* $V_{\mathbb{C}} = \ker(p(D_{\mathbb{C}}))$ *come* $\mathbb{C}$*-spazio vettoriale,* $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2$*.*

Le parti reale e immaginaria di $e^{\alpha t}$ sono

$x_\alpha := \frac{e^{\alpha t} + e^{\bar{\alpha} t}}{2}$, $y_\alpha := \frac{e^{\alpha t} - e^{\bar{\alpha} t}}{2i}$

Queste formano un'altra base di $V_{\mathbb{C}}$ con matrice di cambiamento di base

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}, \ \det P = -1/2i \neq 0$$

D'altra parte x_α e y_α *sono soluzioni reali,*

$x_\alpha, y_\alpha \in \ker(p(D)) = V$

e quindi ne formano una base (su $\mathbb{R}$).

$V = \{c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt); c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Soluzione esplicita del problema di Cauchy.

Consideriamo per esempio il caso $\Delta > 0$.

Fissiamo una condizione iniziale x_0, x_1^0 all'istante t_0. La soluzione generica dell'equazione è

$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$x'(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \mu c_2 e^{\mu t}$

Imponendo le condizioni in t_0 otteniamo un sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 della forma

$Ac_1 + Bc_2 = x_0$, $\lambda Ac_1 + \mu Bc_2 = x_1$, $A, B \neq 0$

con matrice dei coefficienti

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda A & \mu B \end{pmatrix} \text{ , } \det M = AB(\mu - \lambda) \neq 0$$

quindi esiste una soluzione unica che realizza le condizioni iniziali assegnate.

Gli altri casi si trattano analogamente.

Il caso non omogeneo di ordine 2

L'equazione è ora della forma

$p(D)(x(t)) = b(t)$

dove $b : T \to \mathbb{R}$ è continua e non identicamente nulla.

L' integrale totale $V(T)$ dell' equazione omogenea associata si ottiene per restrizione dell' integrale $V = V(\mathbb{R})$ ottenuto prima.

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare u_0 dell' equazione non omogenea.

Metodo della variazione delle costanti

In tutti i tre casi disponiamo di una base y_1, y_2 di $V(T)$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo allora una soluzione particolare dell' equazione non omogenea della forma

$$u(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$$

dove $C_1, C_2 : T \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili almeno due volte.

Derivando abbiamo

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{2} (C_k'(t) y_k(t) + C_k(t) y_k'(t))$$

Imponiamo la condizione ausiliaria

$$\sum_{k=1}^{2} C_k'(t) y_k(t) = 0$$

L' idea è che dobbiamo determinare due funzioni incognite disponendo a priori di una sola relazione data dall' equazione; moralmente abbiamo bisogno di un'altra relazione. Come stiamo per vedere, quella scelta si presta bene allo scopo.

$u''(t) = \sum_{k=1}^{2}(C_k'(t)y_k'(t) + C_k(t)y_k''(t))$

Sostituendo u, u', u'' nell' equazione iniziale otteniamo

$\sum_{k=1}^{2}(a_0 C_k(t)y_k(t) + a_1(C_k'(t)y_k(t) + C_k(t)y_k'(t)) + (C_k'(t)y_k'(t) + C_k(t)y_k''(t)) = b(t)$

Tenendo conto della condizione ausiliaria e del fatto che le y_i sono soluzioni dell' equazione omogenea associata, l'espressione si semplifica e otteniamo il sistema di relazioni

$\sum_{k=1}^{2} C_k'(t)y_k(t) = 0$, $\sum_{k=1}^{2} C_k'(t)y_k'(t) = b(t)$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$W(t) := \det Y(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

è detto il **Wronskiano** delle funzioni y_1, y_2

La funzione $W(t)$ è una soluzione dell' equazione lineare del primo ordine $W' = -a_1 W$.

Dim.

$$W'(t) =$$

$$y_1(t)y''_2(t)+y'_1(t)y'_2(t)-(y_2(t)y''_1(t)+y'_1(t)y'_2(t)) =$$

$$y_1(t)y''_2(t) - y_2(t)y''_1(t) =$$

$$y_1(t)(-a_0y_2(t)-a_1y'_2(t))-y_2(t)(-a_0y_1(t)-a_1y_1(t)) =$$

$$-a_1(y_1(t)y'_2(t) - y_2(t)y'_1(t)) = -a_1W(t)$$

Risolvendo come sappiamo fare quella equazione lineare del primo ordine, abbiamo che per ogni $t_0 \in T$,

$$W(t) = W(t_0)e^{-a_1(t-t_0)}.$$

Corollario: *Se esiste t_0 tale che $W(t_0) = 0$, allora $W(t) = 0$ per ogni $t \in T$.*

Nella nostra situazione,

$W(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in T$

Dim. Altrimenti $W(t) = 0$ per ogni t. Fissato arbitrariamente $t_0 \in T$, esistono due costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *non entrambe nulle* tali che

$$\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0) = 0,\ \alpha y_1'(t_0) + \beta y_2'(t_0) = 0$$

Quindi

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

è una soluzione dell'equazione omogenea tale che $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. Per l'unicità della soluzione segue che $y(t) = 0$ per ogni t, ma questo è contro il fatto che y_1 e y_2 siano per ipotesi linearmente indipendenti.

Possiamo allora esplicitare le derivate delle funzioni incognite usando la regola di Cramer

$$C_1'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2(t) \\ b(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}}{W(t)} = \frac{-y_2(t)b(t)}{W(t)},$$

$$C_2'(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & b(t) \end{pmatrix}}{W(t)} = \frac{y_1(t)b(t)}{W(t)}$$

Queste sono continue, quindi ammettono primitive $C_1(t)$ e $C_2(t)$ per cui abbiamo alla fine determinato una soluzione particolare cercata

$$u_0(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$$

Osservazione:

Il metodo funziona anche se l' equazione lineare del secondo ordine **non** *è a coefficienti costanti, a condizione di conoscere due soluzioni linearmente indipendenti dell' omogenea associata.*

Esempi.

(1) $x'' + x = \tan^2(t)$, $T = (-\pi/2, \pi/2)$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è

$$1 + X^2 = (X - i)(X + i)$$

quindi una base per le sue soluzioni è

$$\{\sin(t), \cos(t)\}$$

Cerchiamo una soluzione della non omogenea della forma

$$u(t) = C_1(t)\sin(t) + C_2(t)\sin(t)$$

Svolgendo i conti secondo lo schema generale, ci riduciamo al sistema

$C_1'(t)\,\mathsf{sin}(t) + C_2'\,\mathsf{cos}(t) = 0$

$C_1'(t)\,\mathsf{cos}(t) - C_2'(t)\,\mathsf{sin}(t) = \mathsf{tan}^2(t)$

$W(t) = -1$, funzione costante

$C_1'(t) = \frac{\mathsf{sin}^2(t)}{\mathsf{cos}(t)}$, $C_2'(t) = -\frac{\mathsf{sin}^3(t)}{\mathsf{cos}^2(t)}$

Si tratta ora di integrare delle funzioni razionali trigonometriche. Applicando la razionalizzazione e svolgendo i conti si ottiene alla fine

$C_1(t) = -\,\mathsf{sin}(t) + \mathsf{log}(|\frac{1+\mathsf{sin}(t)}{1-\mathsf{sin}(t)}|^{1/2})$

$C_2(t) = -\,\mathsf{cos}(t) - \frac{1}{\mathsf{cos}(t)}$

(2) $x'' + 4x' + 4x = \exp(-2t)/t$, $T = \{t > 0\}$

Il polinomio caratteristico è

$X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$

quindi una base di soluzioni per l'omogenea associata è

$\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$

Le funzioni C_1 e C_2 da determinare verificano il sistema

$C_1' + tC_2' = 0$, $-2C_1' + (1 - 2t)C_2' = 1/t$

da cui

$C_1' = -1$, $C_2' = 1/t$

$C_1 = -t$, $C_2 = \log(t)$

Il metodo della variazione delle costanti è **sistematico** *ma può comportare molti calcoli. Per termini noti $b(t)$ di forma particolare ci sono delle* **scorciatoie**.

Una situazione favorevole si ha quando il termine noto appartiene ad un sottospazio vettoriale Z di $\mathcal{E}(T)$ di dimensione finita, di cui conosciamo una base ed è tale che per ogni $f \in Z$, $D(f) \in Z$. Si dice che Z *è chiuso per derivazione.* Vediamo alcuni esempi di tali sottospazi

$Z = \mathbb{R}_d[t]$ le funzioni polinomiali di grado $\leq d$;

$Z = \{p(t)e^{kt}; p(t) \in \mathbb{R}_d[t]\}$;

$Z = \{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), a, b \in \mathbb{R}\}$;

$Z =$

$\{p(t)(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)); p(t) \in \mathbb{R}_d[t], a, b \in \mathbb{R}\}$.

etc.

Nei casi più favorevoli si trova una soluzione particolare in Z ottenuta risolvendo un sistema lineare. Altre volte occorre ampliare un poco Z per trovare una soluzione particolare.

Esempi.

(1) Cominciamo con uno del primo ordine

$x' - x = \sin(5t)$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$u(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$u'(t) = -5c_1 \sin(5t) + 5c_2 \cos(5t)$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$(-c_1 + 5c_2) \cos(5t) + (-5c_1 - c_2 - 1) \sin(5t) = 0$

Poichè le due funzioni trigonometriche sono linearmente indipendenti ci riduciamo al sistema lineare

$-c_1 + 5c_2 = 0$, $-5c_1 - c_2 = 1$

infine

$u_0(t) = (-5/26) \cos(5t) + (-1/26) \sin(5t)$

(2) $b(t) = Q(t)$ è polinomiale.

- Se 0 non è radice del polinomio caratteristico si cerca

$$u = R(t)$$

polinomiale dello stesso grado di $Q(t)$

- Se 0 è radice semplice del polinomio caratteristico, allora si cerca

$$u = tR(t)$$

- Se 0 è radice doppia allora

$$x'' = Q(t)$$

e questa si integra mediante due integrali indefiniti successivi.

Esempio.

$x'' + 3x' = t^2 - 4t$

0 è radice semplice del polinomio caratteristico $X(X+3)$.

$u = At^3 + Bt^2 + Ct$

$u' = 3At^2 + 2Bt + C$

$u'' = 6At + 2B$

Sostituendo e facendo i conti

$A = 1/9$, $B = -7/9$, $C = 14/27$

(3) $x'' - x = e^{2t}$

Il polinomio caratteristico è

$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$k = 2$ non è soluzione del polinomio caratteristico. Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$u = Ce^{2t}$

$u' = 2Ce^{2t}$

$u'' = 4Ce^{2t}$

$(3C - 1)e^{2t} = 0$, $C = 1/3$.

(4) $x'' - x = e^t$

in questo caso una soluzione del tipo $u = Ce^t$ non c'è perchè il termine noto è una soluzione dell'omogenea. Cerchiamo allora una soluzione della forma

$u = Cte^t$

$u' = Ce^t + Ce^t t = e^t(C(1+t))$

$u'' = e^t(C(2+t)$

$e^t(C(2+t) - Ct - 1) = 0$

$C = 1/2$

(5) $x'' - x = te^t$

$u = (At + b)te^t$

$\ldots$

$A = 1/4,\ B = -1/4$

Ricetta

Se $b(t) = Q(t)e^{kt}$

- Se k non è radice del polinomio caratteristico si cerca

$u = R(t)e^{kt}$, dove il polinomio $R(t)$ ha lo stesso grado del polinomio $Q(t)$

- Se k è una radice semplice del polinomio caratteristico si cerca

$u = tR(t)e^{kt}$

- Se k è radice doppia

$u = t^2R(t)e^{kt}$

$b(t) = Q(t)\cos(bt)$

È la parte reale di $Q(t)e^{ibt}$

Si usa la tecnica della *compessificazione*. Si risolve su $\mathbb{C}$ analogamente a quanto fatto per $Q(x)e^{kt}$ e poi si prende la parte reale della soluzione particolare complessa trovata.

Per $b(t) = Q(t)\sin(bt)$ si ragiona analogamente prendendo le parti immaginarie.

Esempio:

$x'' - x = t \cos(t)$

La complessificazione dell'equazione è

$z'' - z = te^{it}$

i non è radice del polinomio caratteristico

$X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$.

Si cerca

$z = (At + B)e^{it}$

dove i parametri incogniti sono complessi.

Svolgendo i conti si trova $A = -1/2$, $B = -i/2$. Prendendo la parte reale otteniamo infine la soluzione particolare

$u_0 = (\sin(t) - t \cos(t))/2$

Studio qualitativo delle soluzioni

È utile trovare un riscontro 'realistico' degli esempi qui sotto nel caso degli oscillatori armonici di natura fisica.

Moto smorzato.

$x'' + bx' + cx = 0$

supponiamo che $c > 0$, $b \geq 0$, prendiamo $t_0 = 0$ e studiamo le soluzioni per $t \geq 0$.

$\Delta > 0$. Nelle ipotesi fatte

$\lambda + \mu = -b < 0$, $\lambda\mu = c > 0$, quindi $\lambda, \mu < 0$. In ogni caso

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

Supponiamo $\mu > \lambda$

La soluzione generale dell'equazione omogenea può essere scritta nella forma

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 e^{(\mu-\lambda)t})$$

A meno di scambiare $x(t)$ con $-x(t)$, possiamo supporre che $x(0) = c_1 + c_2 \geq 0$

$$x'(t) = c_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 \mu e^{\mu t},\ x'(0) = c_1 \lambda + c_2 \mu$$

Si verifica che x si annulla al più una volta, effettivamente in

$$t_1 = \log(-c_1/c_2)/(\mu - \lambda)$$

se $c_2 \neq 0$ e $-c_1/c_2 \geq 1$.

Analogamente, $x'(t)$ si annulla al più in un punto e effettivamente in

$t_2 = \log(-c_1\lambda/c_2\mu)/(\mu - \lambda)$ se $-c_1\lambda/c_2\mu \geq 1$

Si distinguono vari casi.

(a) $c_2 > 0$, $c_1 + c_2 \geq 0 \Rightarrow -c_1/c_2 \leq 1$.

Il punto mobile non ripassa più per l'origine per $t > 0$.

Se $c_1\lambda + c_2\mu > 0$

il punto si allontana all'inizio dall'origine e la sua velocità si annulla in t_2.

se $c_1\lambda + c_2\mu \leq 0$

la velocità non si annulla mai per $t > 0$ e il punto si avvicina in modo decrescente a 0. Lo stesso succede se $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$.

Se $c_2 < 0$, allora il punto passa per l'origine in t_1, la sua velocità si annulla in $t_2 > t_1$, per $t > t_2$ si avvicina in modo crescente a 0.

$\Delta < 0$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\alpha \pm i\omega$, $\alpha = -b/2 \leq 0$.

Se $b = 0$ (moto non smorzato), le soluzioni sono sinusoidali

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Se $b > 0$ (moto smorzato) Le soluzioni sono sinusoidali smorzate

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi)$$

Consideriamo ora una equazione non omogenea della forma

$x'' + bx' + cx = Ae^{\alpha' t}\sin(\omega' t)$, $A > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

e supponiamo che $r = \alpha' + i\omega'$ non sia radice del polinomio caratteristico. Utilizzando il metodo di ricerca di una soluzione particolare visto prima la otteniamo della forma

$x_0(t) = A' e^{\alpha' t}\sin(\omega' t + \phi)$

dove $B = A/(r^2 + br + c)$, $B = A' e^{i\phi}$, $A' > 0$.

Come al solito, la soluzione generale è

$x_0(t) + x(t)$

dove $x(t)$ è una arbitraria dell'omogenea.

Poiché $b > 0$, $x(t)$ è smorzato, quindi per t grande $x_0(t)$ è dominante. Siamo in un regime detto di *oscillazione forzata*.

Se $b = 0$, $\omega_0 = \sqrt{c}$ è la pulsazione delle soluzioni sinusoidali di $x'' + cx = 0$.

Studiando il comportamento del sistema per $b \to 0$, $\omega' \to \omega_0$ si vede che il numero complesso B ha un modulo A' molto grande rispetto al coefficiente A. Si è in presenza di un fenomeno di *risonanza*.

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine arbitrario

Siamo studiando ker($p(D)$) dove $p(X)$ è un polinomio monico di grado n.

Consideriamo la fattorizzazione su $\mathbb{C}$ e quindi su $\mathbb{R}$ del polinomio

$p(X) =$

$(\prod_{j=1}^{h}(X-\lambda_j)^{m_j})(\prod_{l=1}^{k}(X-\alpha_l)^{r_l}(X-\bar{\alpha}_l)^{r_l})$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_l = a_l + ib_l$, $b_l \neq 0$.

$p(X) =$

$(\prod_{j=1}^{h}(X-\lambda_j)^{m_j})(\prod_{l=1}^{k} q_\alpha(X)^{r_l})$

$p(D) =$

$(\circ_{j=1}^{h}(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}) \circ (\circ_{l=1}^{k} q_\alpha(D)^{r_l})$

e tutti i fattori di questa composizione commutano tra loro.

Analogamente

$p(D_{\mathbb{C}}) =$

$(\circ_{j=1}^{h}(D_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}) \circ$

$(\circ_{l=1}^{k}(D_{\mathbb{C}} - \alpha_l \mathrm{Id})^{r_l} \circ (D_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_l \mathrm{Id})^{r_l})$

Allora

$$(\cup_j \ker(D-\lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}) \cup (\cup_l \ker(q_{\alpha_l}(D)^{r_l})) \subset \ker(p(D))$$

Troviamo intanto delle basi per nuclei della forma

$$\ker(D - \lambda \mathrm{Id})^m, \ \ker q_\alpha(D)^r$$

Per il primo prendiamo

$$\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t}\}$$

Poiché la dimensione è uguale a m, basta dimostrare che sono linearmente indipendenti; infatti se per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda t} = 0$$

allora tutti i c_j sono nulli perché un polinomio non nullo ha un numero finito di zeri.

Per $\ker q_\alpha(D)^r$ usiamo il metodo della complessificazione e troviamo come base

$$\{e^{at}\cos(bt), te^{at}\cos(bt), \ldots, t^{r-1}e^{at}\cos(bt)$$

$$e^{at}\sin(bt), te^{at}\sin(bt), \ldots, t^{r-1}e^{at}\sin(bt)\}$$

Osserviamo che in questo modo abbiamo ottenuto complessivamente n funzioni di $\mathrm{ker}(p(D))$. Poiché sappiamo che

$$\dim \mathrm{ker}(p(D)) = n,$$

per dimostrare che sono una base basta dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Ricordiamo (senza dimostrazione) una proprietà dei polinomi (che è una conseguenza del teorema di divisione con il resto)

Identità di Bezout. *Siano* $a(X)$*,* $b(X)$ *due polinomi tali che*

$$M.C.D(a(X), b(X)) = 1$$

allora esistono polinomi $s(X)$*,* $r(X)$ *tali che*

$$1 = s(X)a(X) + r(X)b(X)$$

Consideriamo

$$p(X) = (X - \lambda_j)^{m_j} p_1(X)$$

$$M, C.D((X - \lambda_j)^{m_j}, p_1(X)) = 1$$

Se $u \in \ker(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j} \cap \ker(p_1(D))$ *allora* $u = 0$.

Dim.

$u = s(D)(D(u) - \lambda_j u) + r(D)(p_1(D)(u)) =$

$0 + 0 = 0$

Ne segue che

Se $\mathcal{B}$ *è una base di* $\ker(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}$ *e* $\mathcal{B}_1$ *è una base di* $\ker(p_1(D))$, *allora* $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ *e formato da vettori linearmente indipendenti.*

Dim. Una combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è la somma di una combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ e una di quelli di $\mathcal{B}'$, scriviamo formalmente

$$Comb(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}') = Comb(\mathcal{B}) + Comb(\mathcal{B}')$$

Se è uguale a zero,

$Comb(\mathcal{B}) = -Comb(\mathcal{B}')$, quindi

$$Comb(\mathcal{B}), Comb(\mathcal{B}') \in$$

$$\ker(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j} \cap \ker p_1(D) = \{0\}$$

$$Comb(\mathcal{B}) = Comb(\mathcal{B}') = 0$$

per cui tutti i coefficienti delle combinazioni lineari sono nulli perché $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono entrambe basi.

Iterando l'argomento per $p_1(X)$ e così via fino ad esaurire tutti i fattori della fattorizzazione di $p(X)$, si conclude che l'unione gli n vettori di ker$(p(D))$ costruiti prima sono linearmente indipendenti, come voluto.

Il metodo della variazione delle costanti in generale

Consideriamo ora un'equazione non omogenea

$p(D)(x) = b(t)$, $b(t)$ continua.

Se il grado di $p(X)$ è n, disponiamo in ogni caso di una base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dello spazio V delle soluzioni dell'omogenea associata.

Cerchiamo una soluzione particolare di quella non omogenea della forma

$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$

dove ogni $C_i = C_i(t)$ è una funzione derivabile quanto necessario.

$y' = \sum_i (C_i' y_i + C_i y_i')$

Imponiamo la condizione ausiliaria

$\sum_i C_i' y_i = 0$

$y'' = \sum_i (C_i' y_i' + C_i y_i'')$

Iteriamo il procedimento imponendo l'ultriore condizione

$\sum_i C_i' y_i' = 0$

ottenendo

$y^{(3)} = \sum_i (C_i' y_i^{(2)} + C_i y_i^{(3)})$

Iterando n volte e ragionando analogamente al caso $n = 2$ è sufficiente trovare $(C_1, \ldots, C_n)$ in modo tale che le funzioni derivate $(C_1', \ldots, C_n')$ siano soluzioni del sistema lineare

$$M(C_1', \ldots C_n')^T = (0, 0, \ldots, 0, b(t))^T$$

dove la matrice dei coefficienti

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Il **Wronskiano** $W = \det M$ è diverso da zero per ogni t perché le $y_1, \ldots, y_n$ sono linearmente indipendenti. Si può esplicitare la soluzione $(C_1', \ldots, C_n')$ mediante la formula di Cramer. Infine si ottiene $(C_1, \ldots, C_n)$ mediante n integrali indefiniti.

Il metodo è sistematico e si applica anche se l'equazione lineare omogenea è a coefficienti variabili, a condizione di conoscere una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea.

Per alcune classi di termini noti ci sono scorciatoie, estendendo quanto detto per $n = 2$.

Equazioni del primo ordine a variabili separate

È la più semplice famiglia di equazioni differenziali **non lineari**.

Sono della forma

$x' = a(t)b(x)$,

$a : T \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$, a e b continue. In altre parole, è l'equazione in forma normale associata alla funzione

$F(t, x, x_1) = x_1 - a(t)b(x)$ definita su $T \times I \times \mathbb{R}$.

Vale il teorema di esistenza. Se di più, a è C^1, allora valgono la condizione C-L e il teorema di esistenza è unicità.

Come nel caso delle equazioni lineari del primo ordine, esse saranno studiate in ultima analisi per mezzo di opportuni integrali indefiniti. Però, il carattere non lineare dell' equazione porterà ad un comportamento più complicato delle soluzioni. In particolare, contrariamente al caso lineare, ci saranno soluzioni massimali definite su sotto-intervalli propri di T.

Queste equazioni possono essere studiate secondo il seguente schema.

• Si cercano gli eventuali zeri della funzione $b(x)$. Se $x_0 \in I$ è uno zero di b, allora la funzione costante $x = x_0$ è una soluzione massimale dell'equazione la cui curva integrale è l'intervallo orizzontale $T \times \{x_0\}$.

• Si considerano tutti i sotto-intervalli aperti non vuoti e massimali di I contenuti in

$I \setminus \{b = 0\}$.

Per ciascuno di questi intervalli, chiamiamolo L, consideriamo la restrizione di $f(t,x) = a(t)b(x)$ su $T \times L$ e studiamo la corrispondente equazione differenziale ristretta. Per semplificare le cose supponiamo anche che questa restrizione verifichi la condizione C-L e quindi valga il teorema di esistenza e unicità.

• Per ogni L come nel punto precedente, l' equazione può essere riscritta nella forma

$$\frac{x'}{b(x)} = a(t)$$

Se $x : J \to I$ è una soluzione (massimale) dell'equazione, passando agli integrali indefiniti abbiamo

$$\int \frac{x'(t)}{b(x(t))}dt = \int a(t)dt$$

che grazie alla regola di integrazione per sostituzione è equivalente a

$$\int \frac{1}{b(x)}dx = \int a(t)dt,\ x = x(t)$$

Questo può essere riformulato come segue.

Sia $B : L \to \mathbb{R}$ una primitiva di $1/b(x)$. In certi casi specifici questa può essere calcolata esplicitamente. In generale può essere espressa come una funzione integrale

$B(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{b(y)} dy,\ x_0 \in L.$

Sia $A : T \to \mathbb{R}$ una primitiva di $a(t)$. Se non può essere data esplicitamente, comunque può essere data nella forma di una funzione integrale

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds,\ t_0 \in T.$

Al variare di $C \in \mathbb{R}$, l'equazione

$B(x) - A(t) = C$

definisce una curva Γ_C in $T \times L$.

Fissato $(t_0, x_0) \in T \times L$,

$C_0 = B(x_0) - A(t_0)$

è l'unica costante tale che la curva Γ_{C_0} passi per il punto (t_0, x_0). L'unica curva integrale massimale in $T \times L$ passante per (t_0, x_0) è un arco di Γ_{C_0}. Se $x : J \to L$ è la corrispondente soluzione massimale, allora $t \to (t, x(t))$ è una parametrizzazione di tale arco.

• Le soluzioni dell' equazione sono determinate **implicitamente** dalle relazioni

$B(x(t)) - A(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$

Se la primitiva $B(x)$ è invertibile, possiamo esplicitare le soluzioni:

$x(t) = B^{-1}(A(t) + C)$

ma in generale dobbiamo accontentarci della soluzione implicita che abbiamo ricavato.

Esempi.

(1) $x' = tx^2$, $f(t,x) = a(t)b(x)$ definita su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Vale la condizione C-L.

$x_0 = 0$ è uno zero "doppio" di $b(x) = x^2$ e determina la soluzione costante $x = 0$.

$\mathbb{R} \setminus \{0\} = L_- \cup L_+ = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

In entranbi i casi, su $\mathbb{R} \times L_{\pm}$

$B(x) = -\frac{1}{x}$, $A(t) = \frac{t^2}{2}$

$\Gamma_C = \{-\frac{1}{x} - \frac{t^2}{2} = C\}$

Ponendo $c = -2C$, possiamo esplicitare x ottenedo la famiglia di curve di equazione

$x = \frac{2}{c-t^2}$, $c \in \mathbb{R}$.

Su L_+, necessariamente $c > 0$, e le soluzioni massimali sono definite su $J = (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$. Hanno un punto di minimo assoluto in $t = 0$, con valore minimo che tende a $+\infty$ quando $c \to 0$. Sono convesse, simmetriche rispetto all'asse verticale, con asintoti verticali $t = \pm\sqrt{c}$. "Tendono" alla soluzione costante $x = 0$ quando $c \to \infty$.

Su L_- ci sono due regimi.

Se $c < 0$, le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, hanno un punto di minimo in $t = 0$ con valore minimo che tende a $-\infty$ per $c \to 0$. Sono simmetriche rispetto all'asse verticale delle x, con asintoto orizzontale $x = 0$ per $t \to \pm\infty$. Tendono alla soluzione costante per $c \to -\infty$

Se $c \geq 0$, le soluzioni sono definite sulle semirette $(-\infty, -\sqrt{c})$ e $(\sqrt{c}, +\infty)$ su cui sono rispettivamente strettamente decrescenti (crescenti) con derivata mai nulla, con asintoto verticale in $t = \pm\sqrt{c}$ e orizzontale $x = 0$ per $t \to \pm\infty$.

Coerentemente con il fatto che vale C-L, tali linee integrali sono due a due disgiunte e per ogni punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ne esiste una sola che passa per quel punto. La soluzione costante è l' unica con condizioni iniziali $x(t_0) = 0$. Imponendo $x(t_0) = x_0 \neq 0$, si ricava l'unica costante

$$c = \frac{2+x_0 t_0^2}{x_0}$$

corrispondente all' unica curva integrale che passa per (t_0, x_0)

La ragione per cui certe soluzioni massimali non sono definite su tutto $\mathbb{R}$ è che tendono a $\pm\infty$ per t che tende ad un estremo finito dell'intervallo di definizione. Si dice in tal caso che le soluzioni *scoppiano*.

(2) $x' = a(t)b(x)$, definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$a(t) = t$,

$b(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$, $b(x) = 0$ se $x < 0$.

$b(x)$ è continua ma non è derivabile in 0. In effetti non verifica C-L su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Per ogni $x_0 \leq 0$, si ha la soluzione costante con curva integrale orizzontale $x = x_0$.

Restringiamo l' equazione su $\mathbb{R}\times L$, $L = (0, +\infty)$. Qui $b(x)$ è C^1 e quindi vale la condizione C-L.

Con le solite notazione

$B = 2\sqrt{x}$, $A = \frac{t^2}{2}$

$\Gamma_C = \{2\sqrt{x} - \frac{t^2}{2} = C\}$

Si ottengono allora le curve integrali massimali definite

$x(t) = (\frac{t^2+C}{4})^2$

per $t^2 + C > 0$.

Se $C > 0$, sono definite su tutto $\mathbb{R}$, il grafico è simmetrico rispetto all' asse verticale delle x, convesso con punto di minimo assoluto in $t = 0$.

Se $C \leq 0$, ci sono due soluzioni definite rispettivamente su

$J^- = (-\infty, -\sqrt{-c})$ e $J^+ = (\sqrt{-c}, +\infty)$.

I grafici sono convessi e

$\lim_{t \to \pm\sqrt{-c}} x(t) = 0$

Per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esiste una curva integrale massimale che passa per quel punto. Questo è in accordo con il teorema di esistenza. Si perde però l'unicità.

Per esempio, per $c < 0$, si consideri la funzione non costante definita su tutto $\mathbb{R}$ ottenuta incollando la soluzione costante $x = 0$ definita sull' intervallo $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ con le due soluzioni su $\mathbb{R} \times L$ corrispondenti alla costante $c < 0$. È una funzione continua, derivabile fuori degli estremi dell'intervallo, e la derivata tende a zero per $t \to \pm\sqrt{-c}$. Quindi è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ed è una soluzione dell'equazione differenziale. Quindi per ogni $t_0 \in (-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ ci sono almeno due soluzioni distinte che realizzano il dato iniziale $x(t_0) = 0$. Elaborando questo argomento, si vede che per ogni $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, passano *infinite* curve integrali distinte. Questa non unicità delle soluzioni è coerente con il fatto che la condizione C-L non è verificata.

(3) $x' = -\frac{1}{x}$

$a(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $b(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$.

$B(x) = -(1/2)x^2$, $A(t) = t$.

$\Gamma_C = \{-(1/2)x^2 - t = C\}$

posto $c = 2C$

$x^2 = 2C - 2t$

per ogni $C \in \mathbb{R}$ abbiamo la soluzione massimale

$x_C(t) = \sqrt{2C - 2t}$, definita su $J_C = \{t < C\}$.

Fissata la condizione iniziale (t_0, x_0) si determina l' unico $C = (x_0^2 + 2t_0)/2$

tale che x_C risolve il problema di Cauchy con quella condizione iniziale.

In questo caso la ragione per cui le soluzioni massimali non sono definite su tutto $\mathbb{R}$ non è il fatto che esplodano. Piuttosto 'esplode' la derivata prima $x'_C(t)$ per $t \to C$.

(4) $x' = \frac{x^2}{1+t^2}$, $T \times I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$B(x) = -\frac{1}{x}$, $A(t) = \text{arctan}(t)$

$\Gamma_C = \{-\frac{1}{x} - \text{arctan}(t) = C\}$

ponendo $c = -C$, per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$x(t) = \frac{1}{c - \text{arctan}(t)}$, definita per arctan$(t) \neq c$.

Se c non sta nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ allora si ha una soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$. Se $c \in (-\pi/2, \pi/2)$, si hanno due soluzioni massimali definite sulle semirette

$J_c^- = (-\infty, \tan(c))$, $J_c^+ = (\tan(c), +\infty)$.

Entrambe le soluzioni 'esplodono' per $t \to \tan(c)^\pm$.

Equazione del primo ordine associata ad una famiglia di curve dipendente da un parametro

Abbiamo visto che un' equazione differenziale del primo ordine viene risolta almeno implicitamente) per mezzo di una famiglia di curve piane che fanno da supporto alle curve integrali dell' equazione. A volte questa procedura può essere invertita.

Esempi.

(1) Consideriamo la famiglia di ellissi data dalle equazioni cartesiane:

$x^2 + 2y^2 = c^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Sostituiamo formalmente $y = y(x)$ e deriviamo rispetto a x

$2x + 4y(x)y'(x) = 0$

allora l'equazione a variabili separate

$y' = -\frac{x}{2y}$ definita su $\mathbb{R} \times I^{\pm}$,

$I^+ = (0, +\infty)$, $I^- = (-\infty, 0)$

ha curve integrali contenute nella famiglia di ellissi data.

Osservazione. In questo modo le soluzioni dell'equazione differenziale parametrizzano solo due archi delle varie ellissi. Scambiando il ruoli delle variabili, vediamo che ogni punto su un ellisse sta in un arco soluzione di qualche equazione differenziale.

(2) Consideriamo la famiglia di parabole

$x = c(t-1)^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Sostituiamo $x = x(t)$ e deriviamo rispetto a t,

$x' = 2c(t-1)$

$x' = 2\frac{x}{t-1}$

ha curve integrali contenute nella famiglia di paraboli data.

Traiettorie ortogonali

Due rette di equazioni

$x = -mt$, $x = \frac{1}{m}t$, $m \neq 0$

sono tra loro ortogonali. Allora, data una equazione della forma

$x' = f(t, x)$

l' equazione

$x' = -\frac{1}{f(t,y)}$ (dove ha senso)

ha la proprietà che le sue linee integrali intersecano ortogonalmente le linee integrali della prima equazione.

Esempio.

$x' = -\frac{t}{2x}$

come visto in un esempio precedente ha curve integrali contenute nella famiglia di ellissi

$t^2 + 2x^2 = c^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Allora

$x' = 2x$

ha come curve integrali la famiglia di parabole $x = ct^2$ e queste intersecano ortogonalmente quelle ellissi.

Equazioni a variabili ‘separabili’

Vediamo alcuni esempi di famiglie di equazioni che con opportune manipolazioni possono essere ricondotte allo studio di una equazione a variabili separate (diciamo allora che sono a variabili ‘separabili’).

(1) $x' = g(\frac{x}{t})$

dove per ogni $\lambda \neq 0$,

$g(\frac{x}{t}) = g(\frac{\lambda x}{\lambda t})$

Poniamo formalmente

$x = tu$, $x' = u + tu'$

$u + tu' = g(u)$

$u' = \frac{g(u)-u}{t}$

che è a variabili separate.

Esempio.

$x' = e^{x/t} + x/t$

$x = tu$

$u' = \frac{e^u + u - u}{t} = \frac{e^u}{t}$

Integrando

$u = -\log(\log(c/t)),\ c \in \mathbb{R}$

$x = -t\log(\log(c/t)),\ c \in \mathbb{R}.$

(2) $x' = f(at + mx + c)$ $a, m, c \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

$u = at + mx + c$, $x' = \frac{u'-a}{m}$

$u' = mf(u) - a := b(u)$

a variabili separate (con $a(t) = 1$ per ogni t).

(3) $x' = f(\frac{a_1 t+b_1 x+c_1}{a_2+b_2 x+c_2})$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

L' algebra lineare ci dice allora che esitono unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1\alpha + b_1\beta = -c_1,\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2$$

Poniamo

$$t = u + \alpha,\ x = v + \beta$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$v' = f(\frac{a_1 u+b_1 v}{a_2 u+b_2 v}) = g(\frac{v}{u})$$

e si rientra nel quadro del primo esempio.

(4) $x' + a(t)x = b(t)x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Facciamo formalmente la sostituzione

$x(t) = u(t)v(t)$

dove le due funzioni u e v sono da determinare.

Sostituendo nell' equazione si ottiene

$u'(t)v(t)+u(t)v'(t)+a(t)u(t)v(t) = b(t)(u(t)v(t))^\alpha$

da cui

$v(u' + au) + v'u = b(uv)^\alpha$.

Imponiamo allora che

$$u' + a(t)u = 0$$

che sappiamo risolvere perché è lineare. Sostituendo una soluzione $u = u(t)$ nell' equazione otteniamo

$$v' = [b(t)u(t)^{\alpha-1}]v^{\alpha}$$

che è a variabili separate.

Esempio.

$x' - (4/t)x = t\sqrt{x}$

l' equazione lineare ausiliaria è

$u' - (4/t)u = 0$

come sua soluzione prendiamo

$u(t) = t^4$

Sostituendo troviamo

$v' t^4 = t\sqrt{vt^4}$

$v = ((1/2)\log(t) + C)^2$

$x = t^4((1/2)\log(t) + C)^2.$

Cenni sui sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

Si considera una funzione continua

$f : T \times (I_1 \times \ldots, \times I_n) \to \mathbb{R}^n$

o più in genrale

$f : T \times \Omega \to \mathbb{R}^n$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Interpretiamo questa funzione come un *campo di vettori tangenti* su Ω, dipendente dal tempo.

Abbiamo allora l' equazione differenziale vettoriale del primo ordine (equivalentemente, il sistema di equazioni differenziali del primo ordine) associata:

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = f(t, x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Una soluzione (massimale)

$$x = (x_1, \ldots, x_n) : J \to \Omega$$

è definita su un sotto-intervallo aperto J di T e per ogni $t \in J$ verifica

$$x'(t) = (x'_1(t), \ldots, x'_n(t)) = f(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Il grafico $G(x)$ in $J \times \Omega$ è, per definizione, una curva integrale del sistema e può essere considerato, via la parametrizzazione

$$t \to (t, x(t))$$

come una soluzione dell' integrazione del campo di vettori

$$(1, f(t, x))$$

su $T \times \Omega$, non dipendente dal tempo.

Pe questi sistemi valgono analoghi teoremi di esistenza e di esistenza e unicità.

Ogni equazione di ordine n in forma normale della forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$$

può essere riformulata mediante il sistema di equazioni del primo ordine

$$x' = x_1, x_1' = x_2, \dots, x_{n-2}' = x_{n-1},$$

$$x_{n-1}' = f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1})$$

Cenni suoi sistemi di equazioni differenziali del primo ordine lineari

$A(t) = (a_{i,j}(t))_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$

è una matrice $m \times n$ dove ogni entrata è una funzione continua definita sull' iintervallo T .

$B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))^T$

è un vettore colonna con m righe, dove ogni $b_i(t)$ è continua definita su T.

Allora un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di tipo lineare è della forma

$x' + A(t)x = B(t)$

dove

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T : T \to \mathbb{R}^n$.

È a *coefficienti costanti* se per ogni t

$A(t) = A$

Si può verificare che lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$x' + A(t)x = 0$$

ha dimensione uguale a n.

Questo è semplice da verificare se $A(t)$ è una matrice diagonale; in tal caso ci riconduciamo ad un sistema di n equazioni indipendenti in una variabile

$$x'_j + a_{j,j}(t) = 0$$

Una base dello spazio delle soluzioni sarà formata dalle funzioni a valori vettoriali

$$x_j = e^{-A_{j,j}} E_j$$

dove E_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Per trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo, la cerchiamo della forma

$$u_0 = \sum_j C_j(t) y_j(t)$$

secondo il metodo della variazione delle costanti.

Se $A(t)$ è "diagonalizzabile" cioè esiste $B(t)$ continua a valori nell'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili tale che

$$B^{-1}(t)A(t)B(t) = D(t)$$

è diagonale per ogni t (per esempio se $A(t) = A = A^T$)

allora possiamo ricondurci al caso diagonale per mezzo di questi cambiamenti globali di coordinate che variano con continuità nel tempo.