Geometria Riemanniana. Secondo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

25 marzo 2013

1. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato della metrica Riemanniana canonica, e sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata. Per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^3$ poniamo
$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X \wedge Y \ ,$$
dove $X \wedge Y$ indica l'usuale prodotto vettore di $\mathbb{R}^3$, calcolato punto per punto.
   (a) Si mostri che $\widetilde{\nabla}$ è una connessione.
   (b) Si mostri che le geodetiche rispetto a $\widetilde{\nabla}$ coincidono con le geodetiche rispetto a ∇ (che sappiamo essere i segmenti di retta parametrizzati a velocità costante).
   (c) Sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = p + tv$, con $p \in \mathbb{R}^3$, $v \in T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ (d'ora in poi si sottointende fissata l'identificazione di $\mathbb{R}^3$ con $T_q\mathbb{R}^3$ per ogni $q \in \mathbb{R}^3$). Sia inoltre $w_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore ortogonale a v. Si mostri che il campo lungo γ
$$w(t) = (\cos t)\, w_0 + (\sin t)\, v \wedge w_0$$
estende w_0 ad un campo parallelo lungo γ.

2. Sia M una varietà Riemanniana bidimensionale, sia $p \in M$, e sia $\varepsilon > 0$ tale che $B(0,\varepsilon) \subseteq \mathcal{E}_p \subseteq T_pM$ (si ricordi che $\mathcal{E}_p$ è il dominio della restrizione dell'esponenziale a T_pM). Siano inoltre v, w vettori unitari di T_pM ortogonali fra loro. Si considerino le curve $\alpha_1, \alpha_2\colon [0,\varepsilon) \to M$ definite da $\alpha_1(t) = \gamma_v(t)$, $\alpha_2(t) = \gamma_w(t)$, dove γ_v, γ_w sono geodetiche con velocità iniziale v, w, e per $t < \varepsilon$ sia $\beta_t\colon [0, 2\pi] \to M$ definita da $\beta = \exp_p \circ \psi$, $\psi(s) = (t\cos s, t\sin s)$ (per t sufficientemente piccolo, β_t parametrizza il bordo della palla di centro p e raggio t). Sia inoltre d la distanza Riemanniana su M.
   (a) Si calcolino
$$\lim_{t\to 0} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) - \sqrt{2}\cdot t}{t^3}\,, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{L(\beta_t) - 2\pi t}{t^3}$$
nel caso in cui M sia la sfera bidimensionale (e p sia un qualsiasi punto di M).
   (b) Si calcolino
$$\lim_{t\to 0} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) - \sqrt{2}\cdot t}{t^3}\,, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{L(\beta_t) - 2\pi t}{t^3}$$
nel caso in cui M sia il piano iperbolico (e p sia un qualsiasi punto di M).

3. Una varietà Riemanniana M connessa si dice *inestendibile* se per ogni varietà Riemanniana connessa N ed ogni isometria locale iniettiva $f\colon M \to N$ sia ha che f è surgettiva.

   (a) Si mostri che una varietà Riemanniana connessa e completa è inestendibile.

   (b) Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dotata dell'usuale metrica Euclidea, e sia $\widetilde{M}$ il rivestimento universale di M, dotato dell'unica metrica Riemanniana per cui la mappa di rivestimento sia una locale isometria. Si mostri che $\widetilde{M}$ non è completa, ma è inestendibile.

4. Questo esercizio ha l'intenzione di offrire un'interpretazione geometrica della curvatura. Sia p un punto di una varietà Riemanniana M, e siano X_p, Y_p, Z_p vettori in T_pM. Vogliamo calcolare $R(X_p, Y_p)Z_p$. Assumiamo che X_p, Y_p siano linearmente indipendenti (altrimenti sappiamo che $R(X_p, Y_p)Z_p = 0$).

   (a) Si costruiscano coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ intorno a p in modo che $x^i(p) = 0$ per ogni i, $\partial_1(p) = X_p$, $\partial_2(p) = Y_p$.

   Denotiamo con α_q e β_q le linee integrali di ∂_1 e di ∂_2 con punto iniziale q.

   (b) Per t, s sufficientemente piccoli, si mostri che il cammino

   $$\gamma_{t,s} = \alpha_p|_{[0,t]} * \beta_{\alpha_p(t)}|_{[0,s]} * (\alpha_{\beta_p(s)}|_{[0,t]})^{-1} * (\beta_p|_{[0,s]})^{-1}$$

   è un ben definito loop basato in p. (In altre parole, si mostri che i cammini sopra elencati si concatenano davvero). Si denoti con $\tau_{t,s}\colon T_pM \to T_pM$ la mappa ottenuta per trasporto parallelo lungo $\gamma_{t,s}$.

   (c) Si mostri che, se $\widetilde{Z}$ è un'estensione di Z_p in un intorno di p, allora

   $$\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\widetilde{Z}\,(p) = \lim_{t,s\to 0} \frac{\tau_{t,s}(Z_p) - Z_p}{ts} \ .$$

   (d) Sia $\tau_t = \tau_{t,t}$. Si mostri che

   $$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t(Z_p) - Z_p}{t^2} \ .$$