Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 3 del 15/10/19

1. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$, $n(n^2+5)$ è un multiplo di 6.

2. Determinare il minimo intero $n_0 \geq 0$ tale che per ogni $n \geq n_0$, sia vera la disuguaglianza $7^n \geq 2^n + 6^n$.

3. Determinare il minimo intero $n_0 \geq 0$ tale che per ogni $n \geq n_0$, sia vera la disuguaglianza $3^n \geq n2^n$.

4. Negare la seguente proposizione P: "per ogni $x \in \mathbb{N}$, esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $y > x$." Determinare quale tra P e non(P) è vera.

5. Siano A, B e C insiemi non vuoti, $C \subset B$. Diciamo che un'applicazione $f : A \to B$ è "buona" se per ogni $c \in C$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = c$.

(a) Negando questa definizione, definire le funzioni "cattive" definite su A a valori in B.

(b) Ponendo $A = B = \mathbb{R}$, $C = \{x \in B;\ x > 0\}$, dare un esempio di funzione buona non surgettiva.

6. Consideriamo la proposizione: $(*)$:"Ogni triangolo isoscele verifica la proprietà P". Di ciascuna delle seguenti, si dica se è vera o falsa:

(a) Se disegno a caso un triangolo isoscele e verifico che esso verifica la proprietà P, allora $(*)$ è vera.

(b) Se riesco a disegnare un triangolo isoscele che non verifica la proprietà P, allora $(*)$ è falsa.

(c) Se riesco a disegnare un triangolo che verifica la proprietà P ma non è isoscele, allora posso concludere che $(*)$ è falsa.

(d) Se disegno un triangolo isoscele che verifica la proprietà P e un altro triangolo isoscele che non la verifica, posso concludere che $(*)$ a volte è vera e a volte è falsa.

(e) Nelle stesse ipotesi del punto (d), posso concludere che $(*)$ è falsa.

(f) Non si può rispondere alle domande precedenti perché non sappiamo cosa sia la proprietà P.

Si ricorda che per ogni insieme finito A, $|A|$ indica il numero di elementi di A.

7. Siano A, B, C insiemi finiti non vuoti, $C \subset B$. Indichiamo con X l'insieme delle applicazioni $f : A \to B$ tali che $f(A) \cap C \neq \emptyset$. Determinare $|X|$ in funzione di $(m, n, r) = (|A|, |B|, |C|)$.

8. Siano A, B, C insiemi finiti non vuoti, $C \subset B$. Indichiamo con X l'insieme delle applicazioni *iniettive* $f : A \to B$ tali che $f(A) \cap C \neq \emptyset$. Determinare $|X|$ in funzione di $(m, n, r) = (|A|, |B|, |C|)$.

9. Siano A e B insiemi finiti non vuoti, $B \subset A$. Determinare in funzione di $(m, n) = (|A|, |B|)$, il numero dei sottoinsiemi C di A tali che $C \cap B \neq \emptyset$

10. Sia $f : A \to B$ un'applicazione surgettiva tra insiemi finiti. Dimostrare allora che $|B| \leq |A|$.

11. Calcolare il coefficiente binomiale $\binom{6}{3}$ usando la definizione per (doppia) induzione.

12. Per ogni $0 \leq k \leq n$, fornire almeno due dimostrazioni che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

13. Nello sviluppo di $(2x^2 - xy)^5$ si determini il termine che contiene y^3, senza scrivere l' intero sviluppo.