Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 7 del 11/11/19

1. Siano I_1 e I_2 due intervalli di $\mathbb{R}$. Usando la definizione di intervallo, dimostrare che:
(i) Se $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, allora $I_1 \cap I_2$ è un intervallo e $I_1 \cup I_2$ è un intervallo.
(ii) Supponiamo che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e che esistano $x_j \in I_j$, $j = 1, 2$, tali che $x_1 > x_2$; allora per ogni $y_j \in I_j$, $j = 1, 2$, $y_1 > y_2$.

2. Sia $X \subset \mathbb{R}$, $X = (-\infty, 0) \cup \{1/n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$. Determinare la parte interna $\mathrm{int}(X)$, la chiusura $\overline{X}$, la frontiera $\mathcal{F}(X)$ e l'insieme dei punti isolati di X.

3. Sia $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri irrazionali. Determinare la chiusura $\overline{X}$, la parte interna $\mathrm{Int}(X)$ e la frontiera $\mathcal{F}(X)$ di X.

4. Sia $X \subset \mathbb{R}$, dimostrare che la chiusura della sua parte interna è contenuta nella sua chiusura: $\overline{\mathrm{Int}(X)} \subset \overline{X}$. Supponiamo che $\mathrm{Int}(X) \neq \emptyset$. È vero allora che $\overline{\mathrm{Int}(X)} = \overline{X}$?

5. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che A è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso. (Un' implicazione è stata trattata a lezione; dettagliare la dimostrazione di entrambe le implicazioni).

6. Siano A e B due sottoinsiemi aperti, non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $A \cap B = \emptyset$. Poniamo $X = A \cup B$.
(i) Dimostrare che $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$. ($\overline{B}$ indica la chiusura di B).
(ii) Dimostrare che X non è un intervallo (suggerimento: procedere per assurdo; sia $x \in A$, $y \in B$; supponedo $x < y$, si consideri $\xi = \sup([x, y] \cap A)$, dimostrare che $\xi \in \overline{A} \cap \overline{B}$, $\ldots$).
(iii) Sia Y un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ che non sia un intervallo; dimostrare allora che esistono A e B come sopra tali che $Y = A \cup B$.
(iv) Per ogni $x \in A$, poniamo $A(x)$ il sottoinsieme di A definito dalla seguente proprietà: $a \in A$ appartiene a $A(x)$ se e solo se esiste un intervallo aperto $I \subset A$ tale che entrambi a e x appartengono ad I. Dimostrare che
(a) $x \in A(x)$.
(b) $A(x)$ è aperto.
(c) $A(x)$ è un intervallo.
(d) Dati $x, y \in A$, se $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$, allora $A(x) = A(y)$.

7. Sia A un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in A$, esistono numeri razionali $q, q' \in \mathbb{Q}$, $q' > 0$, tali che $a \in (q - q', q + q')$ e $(q - q', q + q') \subset A$.