

Teoria dei nodi. Programma dettagliato.

Roberto Frigerio

14 dicembre 2011

1 Definizioni fondamentali

- Definizione di nodo nella categoria C^0 . La nozione di isotopia non cattura un concetto sensato di equivalenza tra nodi. Isotopia ambiente tra nodi. Definizione di nodi tame. Nodi e links poligonali. Δ -equivalenza tra nodi.
- Siano L_1, L_2 due links poligonali. Sono fatti equivalenti: L_1 e L_2 sono isotopi tramite un'isotopia ambiente; L_1 e L_2 sono isotopi tramite un'isotopia ambiente lineare a tratti; L_1 e L_2 sono correlati da una sequenza finita di mosse Δ (per la dimostrazione si veda [2]).
- Proiezioni bidimensionali di links. Esistenza di buone proiezioni. Diagramma di un link. Teorema di Reidemeister (per la dimostrazione si vedano [2] o il più dettagliato [6]).
- Sia K un nodo. Sono fatti equivalenti: K è equivalente alla circonferenza standard sul piano orizzontale di \mathbb{R}^3 ; K è planare (ovvero giace su una sfera equatoriale $S^2 \subseteq S^3$; K borda un disco embedded in S^3 . Se vale una delle precedenti condizioni equivalenti, K si dice *banale*.

2 Il complementare di un link. Il gruppo di un link.

- Intorno tubolare di un link. Il complementare di un link come varietà compatta con bordo dato dall'unione di un numero finito di tori.
- Il complementare del toro banale è un toro solido. Calcolo del π_1 del complementare del nodo banale.
- Calcolo del π_1 del complementare del nodo trifoglio: il nodo trifoglio non è banale.
- Classificazione, a meno di omotopia e di isotopia, delle curve semplici chiuse sul toro. (una trattazione completa è disponibile in [1]).
- Definizione dei nodi torici. Teorema di classificazione dei nodi torici: enunciato e dimostrazione parziale. Definizione di chiralità ed invertibilità di un nodo. I nodi

torici sono invertibili e chirali. (il fatto che siano chirali non è stato dimostrato). Discussione dei limiti dello studio del gruppo fondamentale quale strumento per la distinzione di un nodo dalla sua immagine specchiata (o dal suo inverso). (In [7] è possibile trovare una dimostrazione del fatto che il nodo trifoglio è chirale che fa uso solo del gruppo fondamentale).

- Uso sistematico del gruppo fondamentale del complementare: la presentazione di Wirtinger. Esempi: trifoglio, figure-eight knot, Whitehead link. Limiti dell'uso del gruppo fondamentale come invariante: difficoltà nel riconoscimento di un gruppo a partire da una sua presentazione.
- Altri limiti dell'uso del gruppo fondamentale come invariante: links non equivalenti con complementare omeomorfo. Nodi i cui complementari hanno lo stesso gruppo fondamentale, pur non essendo omeomorfi.

3 Colorazioni

- Definizione di 3-colorabilità. Il nodo trifoglio è 3-colorabile. Il figure-eight knot non è 3-colorabile (e dunque non è equivalente al nodo trifoglio). Il link di Whitehead non è 3-colorabile (e dunque non è split). Definizione di link split e di link banale.
- Lo spazio delle n -colorazioni. Il numero di n -colorazioni è un invariante di link non orientati. n -colorabilità del figure-eight knot.

4 Alcuni strumenti di topologia algebrica

- Teorema di Hurewicz.
- Definizione di attaccamento di varietà lungo il loro bordo. Il risultato di un attaccamento dipende solo dalla sua classe di isotopia. Riempimento con palle di varietà con bordo sferico. Attaccamento di 1-manici a superfici.
- Teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili e definizione di genere di una superficie. Presentazione di superfici come dischi con bande.
- L'omologia delle superfici compatte orientabili. Caratteristica di Eulero di superfici.
- Trasversalità: cenni.
- La forma di intersezione per le superfici compatte orientabili. Il caso del toro: classi di omologia di curve e forma di intersezione.

5 Linking number e superfici di Seifert

- L'omologia del complementare di un link. Meridiano e longitudine di un nodo.

- Dehn filling. Riscrittura del Teorema di Gordon-Luecke.
- Definizione di linking number: approccio omologico e diagrammatico. Simmetria del linking number.
- Definizione ed esistenza di superficie di Seifert. Algoritmo di Seifert per la costruzione di una superficie di Seifert.
- Definizione del genere e del genere canonico di un link. Altri invarianti: crossing number e unknotting number.
- Cenni sulla caratteristica di Eulero di superfici. Stime dall'alto del genere a partire da un diagramma. Il nodo trifoglio ha genere uno.
- Il nodo torico $T_{p,q}$ ammette una superficie di Seifert di genere $(p-1)(q-1)/2$.
- Richiami sulla teoria dei rivestimenti: rivestimenti regolari ed automorfismi di rivestimento.
- Definizione di rivestimento abeliano massimale del complementare di un link. Costruzione del rivestimento abeliano massimale del complementare di un nodo.
- Definizione del linking number tramite l'uso di superfici di Seifert.
- Sia $L = K_1 \cup K_2$. Sono fatti equivalenti: $lk(K_1, K_2) = 0$; K_2 ammette una superficie di Seifert disgiunta da K_1 ; una (o entrambe) le longitudini sono nulle nell'omologia di $C(L)$; sul bordo dell'intorno tubolare di K_1 esiste una curva non banale che è nulla nell'omologia di $C(L)$.

6 Allacciamento di links

- Definizione di boundary link e di link algebricamente snodato. Un link split è un boundary link. Un boundary link è algebricamente snodato.
- Esempio: un boundary link che non è split.
- Le longitudini di un boundary link L appartengono a $\pi_1(C(L))''$. Le longitudini di un boundary link si sollevano a loop omologicamente banali nel rivestimento abeliano massimale. Il link di Whitehead, pur essendo algebricamente snodato, non è un boundary link.
- Definizione di cut number di una varietà. Il gruppo fondamentale di una varietà con cut number k si surietta sul gruppo libero su k generatori. Il cut number di una varietà non eccede il rango del suo primo gruppo di omologia a coefficienti interi. Definizione di cut system. Definizione di homology boundary link.
- Un boundary link è homology boundary. Un homology boundary link è algebricamente snodato.
- Studio del bordo delle superfici di taglio di un boundary link.

7 Invarianti di Alexander

- Presentazioni di moduli su anelli commutativi con identità. Relazioni tra diverse presentazioni dello stesso modulo. Ideali di Alexander di moduli finitamente presentati. Alcuni esempi: gli ideali di Alexander degli \mathbb{Z} -moduli finitamente generati, ideali di Alexander della somma diretta di moduli.
- La forma di intersezione associata ad una superficie di Seifert per un nodo.
- Presentazione dell'omologia del rivestimento ciclico infinito tramite l'uso delle matrici di Seifert.
- Modulo di Alexander (ridotto) di un nodo.
- Definizione degli invarianti di Alexander di un nodo.
- Calcolo degli invarianti di Alexander del nodo trifoglio e del figure-8 knot.
- Il polinomio di Alexander di un nodo è simmetrico e assume valore unitario sull'unità.
- Il polinomio di Alexander di un nodo fornisce una limitazione inferiore per il genere.

8 Somme connesse e satelliti

- Definizione di somma connessa di nodi. Il genere è additivo rispetto alla somma connessa. Somma connessa di nodi non banali è non banale. I nodi di genere 1 sono primi. Esistenza e unicità della decomposizione in nodi primi (dimostrazione solo dell'esistenza).
- Ideali di Alexander della somma di due nodi.
- Nodi satellite. I satelliti di nodi non banali sono non banali. Ideali di Alexander dei nodi satellite. Definizione di doppio di Whitehead. Il doppio di Whitehead di un qualsiasi nodo ha modulo di Alexander banale.

9 Invarianti di Alexander, II

- Il modulo di Alexander (non ridotto) di un link. Invarianti di Alexander di links.
- Il calcolo differenziale di Fox: da una presentazione del gruppo fondamentale del complementare ad una presentazione del modulo di Alexander.
- Un esempio: gli ideali di Alexander del link di Whitehead.
- Relazione tra il modulo di Alexander ed il modulo di Alexander ridotto di un link: la successione di Crowell.
- Il polinomio di Alexander dei nodi torici. Calcolo del genere dei nodi torici.

- Il rivestimento abeliano massimale del complementare di un link: il caso degli homology boundary links. Il primo ideale di Alexander di un homology boundary link è nullo. Il link di Whitehead non è un homology boundary link.
- Il secondo ideale di un boundary link con 2 componenti è principale. Un esempio: un homology boundary link che non è un boundary link.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Rolfsen, *Knots and links*.
- [2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*.
- [3] P. Cromwell, *Knots and links*.
- [4] W. B. R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*
- [5] P. Papi, C. Procesi (con la collaborazione di P. Cellini), *Invarianti di nodi*, disponibile alla pagina <http://www.mat.uniroma1.it/procesi/publi.html>
- [6] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-manifolds*.
- [7] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*.