ANNO ACCADEMICO 2008/2009
Geometria Superiore II
Esercizi III

$*$ **Esercizio 1.**
Sia X uno spazio metrico, e, per ogni $x, y, z \in X$, si denoti con $(x, y)_z$ il prodotto di Gromov di x e y rispetto a z. Ricordiamo che X è detto (δ)-iperbolico se per ogni $x, y, z, w \in X$ si ha

$$(x, z)_w \geq \min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - \delta.$$

Si mostri che, se esiste $w_0 \in X$ tale che

$$(x, z)_{w_0} \geq \min\{(x, y)_{w_0}, (y, z)_{w_0}\} - \delta$$

per ogni $x, y, z \in X$, allora X è (2δ)-iperbolico.

Esercizio 2.
Siano G_1, G_2 i gruppi definiti dalle seguenti presentazioni:

$$G_1 = \langle a, b \,|\, ababa \rangle, \quad G_2 = \langle a, b \,|\, a^{-1}bab^{-2}, b^{-1}aba^{-2} \rangle.$$

Si mostri che $G_1 \cong \mathbb{Z}$, $G_2 = \{1\}$.

Esercizio 3.
Sia G un gruppo finitamente presentato, e sia H un *retratto* di G, ovvero un sottogruppo di G per cui esista un omomorfismo $\psi\colon G \to H$ tale che $\psi(h) = h$ per ogni $h \in H$.

- Si mostri che H è finitamente presentato (si mostri innanzi tutto che è finitamente generato, si costruisca un sistema finito di generatori di G a partire da un sistema finito per H e da un sottoinsieme finito di $\ker \psi$; si mostri che G ammette una presentazione finita relativa a tali generatori, e se ne deduca una presentazione finita di H. In alternativa, si consideri una presentazione di G con generatori $\{g_i\}_{i=1,\ldots,m}$ e relazioni $\{r_l = r_l(g_1, \ldots, g_m)\}_{l=1,\ldots,k}$, e, posto $h_i = \psi(g_i)$, sia H_i una parola in m simboli tale che $h_i = H_i(g_1, \ldots, g_m)$: si dimostri che

$$\langle s_1, \ldots, s_m \,|\, s_i H_i(s_1, \ldots, s_m)^{-1}, r_l(s_1, \ldots, s_m),\ i = 1, \ldots m,\ l = 1, \ldots, k \rangle$$

  è una presentazione di H).
- Si mostri che $\delta_H \preceq \delta_G$ (indico con δ_Γ la classe di crescita della funzione di Dehn per Γ).

Esercizio 4.
Siano G_1, G_2 gruppi infiniti finitamente presentati. Si mostri che

$$\delta_{G_1 \times G_2}(n) \simeq \max\{n^2, \delta_{G_1}(n), \delta_{G_2}(n)\}.$$

(Suggerimento: si sfrutti l'esercizio precedente).