Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Esercizi

1. Sia $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale tra spazi di Hausdorff. Si assuma che E sia compatto e che X sia connesso per archi.

(1) Si mostri che, per ogni $x \in X$, l'insieme $p^{-1}(x)$ è finito.
(2) Fissato $x \in X$, sia $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Si mostri che esistono aperti a due a due disgiunti $V_1, \ldots, V_n$ di E tali che $y_i \in V_i$ per ogni i e $p|_{V_i}\colon V_i \to U_i$ sia un omeomorfismo su un intorno aperto U_i di x in X.
(3) Si mostri che p è un rivestimento.

Sol. (sketch). (1): Poiché X è T_2, $p^{-1}(x)$ è chiuso, dunque compatto, e discreto in quanto p è omeo locale.

(2): Per definizione di omeomorfismo locale, esistono $V_1', \ldots, V_n'$ di E tali che $y_i \in V_i'$ per ogni i e $p|_{V_i'}\colon V_i' \to U_i'$ sia un omeomorfismo su un intorno aperto U_i' di x in X. Dobbiamo ora rendere i V_i' disgiunti. Poiché E è T_2, per ogni i, j, $i \neq j$, esistono $W_{i,j}$ e $W_{j,i}$ intorni aperti di y_i, y_j rispettivamente, tali che $W_{i,j} \cap W_{j,i} = \emptyset$. Poniamo $V_i = V_i' \bigcap_{j\neq i} W_{i,j}$ e $U_i = p(V_i)$ (perché la costruzione funziona?).

(3): Dato $x \in X$, costruiamo un intorno ben rivestito U di x come segue. Con riferimento al punto precedente, poniamo

$$U = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \setminus p\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) .$$

Poiché i V_i sono aperti, $E \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ è chiuso, dunque compatto; la sua immagine è perciò compatta, dunque (poiché X è T_2) chiusa. Usando questo fatto, si verifica che U è aperto. Usando il punto (2), non è difficile verificare che U è ben rivestito (fate però attenzione! in particolare, togliere $p\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i\right)$ è necessario affinché la costruzione funzioni).

2. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Si mostri che, se X è T_2, anche E è T_2.

Sol. (sketch). Siano $y_1, y_2 \in E$ distinti. Se $p(y_1) \neq p(y_2)$, le preimmagini di intorni disgiunti di $p(y_1), p(y_2)$ forniscono intorni disgiunti di y_1, y_2. Se invece $p(y_1) = p(y_2)$, il fatto che y_1, y_2 ammettano intorni disgiunti discende direttamente dall'esistenza di un intorno ben rivestito di $p(y_1) = p(y_2)$.

3. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento di grado finito. Si mostri che X è compatto di Hausdorff se e solo se E è compatto di Hausdorff.

Sol. (sketch). Supponiamo dapprima che X sia compatto di Hausdorff. Allora E è di Hausdorff per l'esercizio precedente. Sia ora $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di E. Sia d il grado di p. Per ogni $x \in X$, si mostri che esiste un intorno aperto ben rivestito W_x di x in X con la seguente proprietà: se $p^{-1}(W_x) = \sqcup_{j=1}^d Z_j(x)$, con $Z_j(x)$

aperto in E e $p|_{Z_j(x)}\colon Z_j(x) \to W_x$ omeomorfismo, allora per ogni $j = 1, \dots, d$ l'insieme $Z_j(x)$ è contenuto in un aperto U_i del ricoprimento $\mathcal{U}$. Usando la compattezza di X, abbiamo ora $X = \bigcup_{k=1}^n W_{x_k}$. Per costruzione, per ogni k l'insieme $p^{-1}(W_{x_k})$ è contenuto nell'unione di un numero finito (al massimo d) di elementi di $\mathcal{U}$. Ne segue che $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito.

Supponiamo ora che E sia compatto di Hausdorff. Poiché p è continua, anche $X = p(E)$ è compatto. Siano ora $x, y \in X$, $x \neq y$, e siano U, V intorni ben rivestiti di x, y, rispettivamente. Allora $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^d W_i$, $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^d Z_i$. Ragionando come nella soluzione del punto (2) dell'Ex. 1, troviamo intorni aperti $W_i' \subseteq W_i$, $Z_i' \subseteq Z_i$ dei punti delle fibre di x e y che siano a due a due disgiunti. A questo punto, posto $\hat{U} = \bigcap_{i=1}^d p(W_i')$, $\hat{V} = \bigcap_{i=1}^d p(Z_i')$, abbiamo che $\hat{U}, \hat{V}$ sono aperti (perché?) disgiunti (perché?) che contengono rispettivamente x e y.

4. Sia X uno spazio topologico, e sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di X tale che $U_n \subseteq U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che U_n sia semplicemente connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che X è semplicemente connesso. (Suggerimento: si fissi $x_0 \in U_0$, e si osservi che i loops basati in x_0 hanno immagine compatta).

Sol. (sketch). Dato $\gamma \in \Omega(x_0, x_0)$, abbiamo che $Z = \gamma([0,1])$ è compatto. Poiché $Z \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ e gli U_n sono aperti, abbiamo $Z \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k}$ per un numero finito di indici $n_1, \dots, n_k$. Posto $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, abbiamo allora $Z \subseteq U_m$. Ora, U_m è semplicemente connesso, per cui γ è omotopo al cammino costante c_{x_0} in U_m, dunque, a maggior ragione, in X.

5. Siano $X = (\mathbb{R} \times \{-1, 1\})/\sim$, dove $(x, t) \sim (y, t')$ se e solo se $(x, t) = (y, t')$ oppure $x = y \neq 0$, e $E = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})/\sim'$, dove $(x, n) \sim' (y, m)$ se e solo se $(x, n) = (y, m)$ oppure $x = y > 0$, $n = 2i$, $m = 2i + 1$, $i \in \mathbb{Z}$, oppure $x = y < 0$, $n = 2i$, $m = 2i - 1$, $i \in \mathbb{Z}$.

Sia infine $p\colon E \to X$ definita da

$$p([(x,t)]) = \begin{cases} [(x,1)] = [(x,-1)] & \text{se } x \neq 0 \\ [(0,1)] & \text{se } (x,t) = (0,2i) \\ [(0,-1)] & \text{se } (x,t) = (0,2i+1)\ . \end{cases}$$

(1) Si mostri che p è ben definita e continua.
(2) Si mostri che p è un rivestimento.
(3) Si mostri che E è semplicemente connesso. (Suggerimento: potrebbe essere utile usare l'esercizio precedente).
(4) Si calcoli il gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(E, p)$.
(5) Si calcoli $\pi_1(X)$.

Sol. (sketch). (1): È facile verificare che p è ben definita (bisogna verificare che, se $(x, n) \sim (y, m)$, allora le formule per $p([(x, n)])$ e per $p([(y, m)])$ definiscono lo stesso elemento di X). Inoltre, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_E"] & \mathbb{R}\times\{-1,1\} \arrow[d, "\pi_X"] \\ E \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd} ,$$

dove $\psi(x,n)=(x,1)$ se n è pari, $\psi(x,n)=(x,-1)$ se n è dispari. Ora, ψ è ovviamente continua, per cui lo è anche $\pi_X\circ\psi$. Per la proprietà universale della topologia quoziente, anche p è continua.

(2): Con un po' di pazienza, si può verificare che i seguenti intorni dei punti di X sono ben rivestiti: per $[x,1]=[x,-1]$ con $x>0$ basta prendere $U=\{[y,1]\,|\,y>0\}$; per $[x,1]=[x,-1]$ con $x<0$ basta prendere $U=\{[y,1]\,|\,y<0\}$; per $[0,1]$ basta prendere $U=\{[y,1]\,|\,-1<y<1\}$; per $[0,-1]$ basta prendere $U=\{[y,-1]\,|\,-1<y<1\}$.

(3): Sia $\pi_E\colon\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\to E$ la proiezione al quoziente, e sia $V_n=\pi_E(\mathbb{R}\times\{n\})$. Si mostri innanzi tutto che, per ogni $n\in\mathbb{Z}$, la restrizione $\pi_E|_{\mathbb{R}\times\{n\}}\colon\mathbb{R}\times\{n\}\to V_n$ è un omeomorfismo su un aperto. Si mostri anche che $V_n\cap V_m=\emptyset$ se $|n-m|\geq 2$, mentre $V_n\cap V_{n+1}$ è omeomorfo a una semiretta aperta per ogni $n\in\mathbb{N}$. Per ogni $n\in\mathbb{N}$, siano ora $U_n=\bigcup_{i=0}^n V_n$, e $U_{-n}=\bigcup_{i=-n}^0 V_n$. Usando quanto osservato sopra, Van Kampen e un semplice argomento induttivo, si mostri che U_n e U_{-n} sono semplicemente connessi per ogni $n\in\mathbb{N}$. Usando ancora Van Kampen, si mostri che $W_n=U_n\cup U_{-n}$ è semplicemente connesso. Infine, si usi l'esercizio precedente per concludere che E è semplicemente connesso.

(4): Per ogni $n\in\mathbb{Z}$, sia $\tau_n\colon E\to E$ definito da $\tau_n([x,m])=[x,m+2]$. Non è difficile verificare che la mappa $\psi\colon\mathbb{Z}\to\mathrm{Aut}(E)$ data da $\psi(n)=\tau_n$ è un ben definito omomorfismo di gruppi iniettivo. Poiché i τ_n agiscono transitivamente sulle fibre di $p\colon E\to X$, l'omomorfismo ψ è anche surgettivo, per cui $\mathrm{Aut}(E)\cong\mathbb{Z}$.

(5): Per (2) e (3), la mappa $p\colon E\to X$ è un rivestimento universale, per cui $\pi_1(X)\cong\mathrm{Aut}(E)\cong\mathbb{Z}$.

6. Sia X lo spazio topologico dell'esercizio precedente. Si mostri che, nonostante $\pi_1(X)\cong\pi_1(S^1)$, lo spazio X non è omotopicamente equivalente a S^1. (Suggerimento: sfruttando le (mancate) proprietà di separazione di X, si mostri che qualsiasi mappa continua $f\colon X\to S^1$ fattorizza tramite $\mathbb{R}$, ovvero che esistono fuzioni continue $g\colon X\to\mathbb{R}$ e $h\colon\mathbb{R}\to S^1$ tali che $f=h\circ g$; si deduca che $f_*\colon\pi_1(X)\to\pi_1(S^1)$ non può essere un isomorfismo).

Sol. (sketch). Sia Y uno spazio topologico di Hausdorff, e sia $f\colon X\to Y$ continua. Se si avesse $f([0,1])\neq f([0,-1])$, poiché Y è T_2 le preimmagini di due intorni disgiunti di $f([0,1])$ e $f([0,-1])$ sarebbero due intorni disgiunti di $[0,1]$ e $[0,-1]$. Poiché tali intorni non esistono, si ha $f([0,1])=f([0,-1])$.

Sia ora $f\colon X\to S^1$ continua, e sia $g\colon X\to\mathbb{R}$, $g([x,t])=x$. È facile vedere che g è aperta e surgettiva, per cui è un'identificazione. Inoltre, per quanto appena visto abbiamo $f([0,1])=f([0,-1])$, per cui esiste $h\colon\mathbb{R}\to S^1$ tali che $f=h\circ g$. Poiché f è continua e g è un'identificazione, anche h è continua. Poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, ne segue che $f_*=h_*\circ g_*$ è la mappa nulla.

7. Sia $n \geq 1$, e sia $f\colon S^n \to S^n$ tale che $f(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Si dimostri che f è omotopa all'identità. (Suggerimento: si cerchi un cammino "canonico" che congiunge x a $f(x)$).

Sol. (sketch). $H(x,t) = (tf(x)+(1-t)x)/\|tf(x)+(1-t)x\|$. Dove si usa che $f(x) \neq -x$?

8. Sia n dispari, e sia $f\colon S^n \to S^n$ definita da $f(x) = -x$. Si mostri che f è omotopa all'identità. (Se n è pari, ciò è falso, ma una dimostrazione di questo fatto non può essere fornita con gli strumenti sviluppati in questo corso; per gli interessati si rimanda a GTD).

Sol. (sketch). $H((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}), t) = ((\cos(t\pi)x_1 + (\sin t\pi)x_2, -(\sin t\pi)x_1 + \cos(t\pi)x_2, \ldots, \cos(t\pi)x_n + (\sin t\pi)x_{n+1}, -(\sin t\pi)x_n + \cos(t\pi)x_{n+1})$. Dove si usa che n è dispari? Perché non si può prendere un'omotopia più semplice, come $H(x,t) = tx + (1-t)(-x)$?

9. Un *gruppo topologico* è uno spazio topologico G dotato di una struttura di gruppo tale che le applicazioni

$$\begin{aligned} m\colon G \times G \to G\,, &\qquad m(g,h) = g \cdot h\ , \\ i\colon G \to G\,, &\qquad i(g) = g^{-1} \end{aligned}$$

sono continue. Sia $e \in G$ l'elemento neutro di G.

(1) Siano γ_1, γ_2 due loops in G basati in e, e sia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to G$ la mappa definita da
$$H(t,s) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(s)\ .$$
Si mostri che H è continua.

(2) Si descriva il loop ottenuto restringendo H al bordo del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in termini di (concatenazioni di) γ_1 e γ_2 (e loro inversi).

(3) Si mostri che $\pi_1(G, e)$ è abeliano.

(4) Si mostri che $S^1 \vee S^1$ (con la sua usuale topologia) non può essere dotato di una struttura di gruppo topologico.

Sol. (sketch). (1): Segue banalmente dalle proprietà della topologia prodotto (e dal fatto che la composizione di funzioni continue è continua).

(2): Partendo da $(0,0)$ e proseguendo in senso antiorario, abbiamo $\gamma_1 * \gamma_2 * \overline{\gamma}_1 * \overline{\gamma}_2$.

(3): Per quanto visto al punto precedente, per ogni coppia di loops γ_1, γ_2, si ha $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] \cdot [\gamma_1]^{-1} \cdot [\gamma_2]^{-1} = 1$, cioè $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_2] \cdot [\gamma_1]$.

(4): Il gruppo fondamentale di $S^1 \vee S^1$ non è abeliano.

10. Sia G il gruppo delle matrici di $SO(2)$, dotato della topologia di sottospazio dello spazio di tutte le matrici reali 2×2, e dell'usuale struttura di gruppo. Si mostri che G è un gruppo topologico. Si calcoli $\pi_1(SO(2), \mathrm{Id})$.

Sol. (sketch). Moltiplicazione ed inversione sono mappe polinomiali nelle entrate delle matrici in $SO(2)$, e sono pertanto continue. Dunque G è un gruppo topologico.

Se A è una matrice 2×2, denotiamo con $c(A)$ la prima colonna di A. Allora la mappa $A \mapsto c(A)$ è una bigezione tra $SO(2)$ e S^1 (perché?). Essendo $SO(2)$ compatto (in quanto chiuso e limitato in $\mathbb{R}^4$; lo si dimostri per bene), e S^1 di Hausdorff, si ha $\pi_1(SO(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

11. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con E connesso per archi. Si mostri che, se esiste una sezione continua $s\colon X \to E$ tale che $p \circ s = \mathrm{Id}_X$, allora p è un omeomorfismo.

Sol. (sketch). Se p_*, s_* sono le mappe indotte sui gruppi fondamentali, allora $p_* \circ s_* = \mathrm{Id}$, per cui p_* è surgettiva. Dunque il grado del rivestimento, che è dato dall'indice di $p_*(\pi_1(E))$ in $\pi_1(X)$, è uguale a 1. Dunque p è bigettiva, aperta e continua, ed è perciò un omeomorfismo.

12. Sia $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e sia $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ la mappa $f(z) = z^d$, dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si mostri che f è un rivestimento di grado d.

Sol. (sketch). Sia $z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$, $R > 0$ un punto di $\mathbb{C}^*$. Si verifichi che l'insieme
$$U = \{Re^{i\theta} \mid R > 0, \theta \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)\}$$
è un intorno ben rivestito di z_0.

13. Sia X una n-varietà topologica connessa, con $n \geq 3$, e sia $p \in X$. Questo esercizio vuole mostrare che $\pi_1(X) \cong \pi_1(X \setminus \{p\})$, cioè che togliere un punto ad X non ne muta il gruppo fondamentale.

(1) Sia $\varphi\colon B \to U$ un omeomorfismo tra la palla aperta $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ e un aperto U di X tale che $\varphi(0) = p$ (esiste per definizione di varietà). Sia $C = \overline{B(0,1/2)}$ e sia $V = \varphi(C) \subseteq U \subseteq X$. Si mostri che U, $X \setminus V$, $U \cap (X \setminus V)$ sono aperti connessi per archi di X.
(2) Si mostri che $U \cap (X \setminus V)$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1}.
(3) Sia $x_0 \in U \cap (X \setminus V)$. Applicando il Teorema di Van Kampen, si mostri che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X \setminus V, x_0)$.
(4) Si mostri che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X \setminus \{p\}, x_0)$.

Sol. (sketch). (1): $U \cong B$ è ovviamente connesso per archi. L'insieme $U \cap (X \setminus V)$ è omeomorfo alla corona sferica $B \setminus C$, ed è pertanto connesso per archi. Infine, dati $p, q \in X \setminus V$, esiste un arco γ in X che li connette. Se questo arco non interseca V, abbiamo finito. Altrimenti, poniamo $\Omega_- = \{t \in [0,1] \mid \gamma([0,t)) \cap V = \emptyset\}$ e $\Omega_+ = \{t \in [0,1] \mid \gamma((t,1]) \cap V = \emptyset\}$, $t_0 = \sup \Omega_-$ e $t_1 = \inf \Omega_+$. Si noti che, poiché V è chiuso e $\gamma(0) \notin V$, $\gamma(1) \notin V$, si ha $t_0 > 0$, $t_1 < 1$. Poiché $\gamma(t_0) \in U$ e U è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma(t_0 - \varepsilon) \in U$, da cui, per definizione di t_0, si ha $q_0 = \gamma(t_0 - \varepsilon) \in U \setminus V = U \cap (X \setminus V)$. Analogamente, esiste $\varepsilon' > 0$ tale che $q_1 = \gamma(t_1 + \varepsilon) \in U \cap (X \setminus V)$. Abbiamo che x è connesso da un arco a q_0 in $X \setminus V$; y è connesso da un arco a q_1 in $X \setminus V$; e q_1 è connesso da un arco a q_2 in $X \setminus V$ in quanto $U \setminus V$ è connesso per archi, da cui la tesi.

(2): $U \cap (X \setminus V)$ è omeomorfo a $B \setminus C \cong (1/2, 1) \times S^{n-1}$.

(3): Applicando Van Kampen agli aperti U e $X \setminus V$, la tesi segue facilmente dal fatto che $U \cap (X \setminus V)$ è semplicemente connesso (vedi punto 2) e che $U \cong B$ è semplicemente connesso.

(4): Basta usare il punto precedente e osservare che $X \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a $X \setminus V$ (perché? Si può dimostrare ad esempio che entrambi si retraggono per deformazione su $X \setminus U$).

14. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si calcoli $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{p\})$, dove p è un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Sol. (sketch). Si dimostri innanzi tutto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{[1 : 0 : \cdots : 0]\}$. Come visto a lezione, quest'ultimo insieme si retrae su $\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \,|\, x_0 = 0\}$ tramite l'omotopia $[x_0 : \cdots : x_n] \to [tx_0 : \cdots : x_n]$. Dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, il cui gruppo fondamentale è isomorfo a $\{1\}$ se $n = 1$, a $\mathbb{Z}$ se $n = 2$, e a $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ se $n \geq 3$. Si osservi che ciò è coerente con l'esercizio precedente.

15. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare di segnatura (a, b, c) su $\mathbb{R}^n$ (per cui $a + b + c = n$; assumiamo ad esempio che a, b, c siano nell'ordine l'indice di positività, di negatività e di nullità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Sia
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, x \rangle = 1\} \ ,$$
e sia $x_0 \in X$ (assumiamo $a > 0$ in modo che X sia non vuoto).

Si calcoli $\pi_1(X, x_0)$. (Suggerimento: si mostri innanzi tutto che si può supporre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in forma "standard", ovvero associato ad una matrice diagonale con solo $0, 1, -1$ sulla diagonale; a questo punto, si mostri che X è omotopicamente equivalente ad una sfera).

Sol. (sketch). Segue da risultati noti di algebra lineare che esiste un isomorfismo lineare $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\langle x, y \rangle = B(Ax, Ay)$, dove B è un prodotto scalare "standard". Poiché A è un omeomorfismo, se ne deduce facilmente che possiamo supporre $\langle \cdot, \cdot \rangle = B$. A questo punto,
$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_{a+b}^2 = 1\} \ ,$$
da cui
$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_a^2 = 1 + x_{a+1}^2 + \cdots + x_{a+b}^2\} \ .$$
Osserviamo che, se $(x_1, \ldots, x_n) \in X$, allora $x_1^2 + \cdots + x_a^2 \geq 1$, per cui è ben definita la mappa $\psi\colon X \to S^{a-1} \times \mathbb{R}^{n-a}$ data da
$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_a^2}}, \ldots, \frac{x_a}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_a^2}}, x_{a+1}, \ldots, x_{a+b}, x_{a+b+1}, \ldots, x_n \right) \ .$$
Si mostri che ψ è un omeomorfismo esplicitando un inversa di ψ, e si concluda che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(S^{a-1}, y_0)$ è isomorfo a $\{1\}$ se $a = 1$ e $a \geq 3$, e a $\mathbb{Z}$ se $a = 2$.

16. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ un convesso chiuso con parte interna non vuota, e sia $p \in C$. Si mostri che:

(1) Se $p \in \partial C$, allora $\pi_1(C \setminus \{p\}) = \{1\}$.
(2) Se $p \in C \setminus \partial C$, allora $\pi_1(C \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$.

Sol. (sketch). (1): $C \setminus \{p\}$ è stellato rispetto ad un qualsiasi punto della sua parte interna, dunque è contraibile e semplicemente connesso. (2): Se $p \in C \setminus \{p\}$, allora $C \setminus \{p\}$ si retrae per deformazione sul bordo di una piccola palla centrata in p. Tale bordo è omeomorfo ad S^1, da cui la tesi.

17. Sia $f\colon D^2 \to D^2$ un omeomorfismo. Si mostri che $f(S^1) = S^1$ (suggerimento: si sfrutti l'esercizio precedente).

Sol. (sketch). Se $f(p) = q$, allora $\pi_1(D^2 \setminus \{q\}) = \pi_1(f(D^2 \setminus \{p\})) \cong \pi_1(D^2 \setminus \{p\})$. Ne segue che $p \in S^1$ se e solo se $f(p) \in S^1$, da cui la tesi (applicando lo stesso argomento a f^{-1}).

18. Sia Σ_g la superficie compatta connessa orientabile di genere g. Si mostri che esiste un omomorfismo surgettivo $\varphi\colon \pi_1(\Sigma_g) \to F_g$, dove F_g è il gruppo libero generato da g lettere. (Suggerimento: si parta dalla presentazione di $\pi_1(\Sigma_g)$ descritta a lezione).

Sol. (sketch). $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \,|\, [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] \rangle$. Se $s_1, \ldots, s_g$ sono i generatori di F_g, basta porre $\varphi(a_i) = s_i$, $\varphi(b_i) = 1$ per ogni i (perché?).

19. Sia Σ_g la superficie compatta connessa orientabile di genere g. Per quali g il gruppo fondamentale di Σ_g è abeliano? (Si sfrutti l'esercizio precedente).

Sol. (sketch). Per $g = 0$ il gruppo $\pi_1(\Sigma_g)$ è banale, quindi abeliano. Per $g = 1$ il gruppo $\pi_1(\Sigma_g) = \pi_1(S^1 \times S^1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$, quindi abeliano. Se $g \geq 2$, per l'esercizio precedente $\pi_1(\Sigma_g)$ si surietta su un gruppo non abeliano, dunque non è abeliano.

20. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso, e siano $\widetilde{x} \in E$, $x = p(\widetilde{x}) \in X$. Abbiamo mostrato a lezione che, se p è regolare, allora $\mathrm{Aut}(E) \cong \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$. Questo esercizio estende questo risultato a rivestimenti non necessariamente regolari.

Sia $N = \mathrm{Norm}(p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})))$ il normalizzatore di $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$ in $\pi_1(X, x)$.

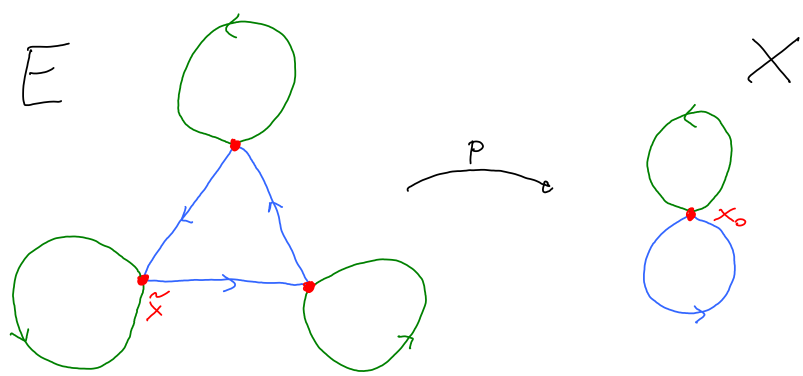
(1) Si mostri che, se $\alpha \in N$, allora esiste un unico automorfismo $\varphi(\alpha) \in \mathrm{Aut}(E)$ tale che $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot \alpha$.
(2) Si mostri che la mappa $\varphi\colon N \to \mathrm{Aut}(E)$ è un omomorfismo di gruppi surgettivo.
(3) Si mostri che $\mathrm{Aut}(E) \cong N/p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$.

Sol. (sketch). Ricordiamo che esiste $\varphi \in \mathrm{Aut}(E)$ tale che $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot \alpha$ se e solo se $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})) = p_*(\pi_1(E, \widetilde{x} \cdot \alpha))$ (ed in tal caso, tale φ è unico perché gli automorfismi di rivestimento agiscono in maniera libera sulle fibre). Per quanto visto a lezione, inoltre, $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x} \cdot \alpha)) = \alpha^{-1} \cdot p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})) \cdot \alpha$ (ciò segue dal fatto che $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$ è lo stabilizzatore di $\widetilde{x}$ e da facili considerazioni sulle azioni di gruppo; provate a ridimostrarlo direttamente per esercizio). Questi fatti implicano (1) e (2) (il fatto che φ sia un omomorfismo di gruppi si dimostra esattamente come nel caso dei rivestimenti regolari).

Infine, (3) segue da (1) e (2) insieme al fatto che $\ker\varphi = \mathrm{stab}(\widetilde{x})$ (in quanto l'azione degli automorfismi è libera).

21. Sia $X = S^1 \vee S^1$, sia x_0 il punto di X nel quale le due copie di S^1 si incontrano, siano a, b i generatori di $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ corrispondenti ai generatori del gruppo fondamentale di ciascuna copia di S^1, e sia $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ l'omomorfismo tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Sia infine E il rivestimento associato a $\ker\varphi$, cioè sia $p\colon E \to X$ un rivestimento con $\widetilde{x} \in p^{-1}(E)$ e $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})) = \ker\varphi$.

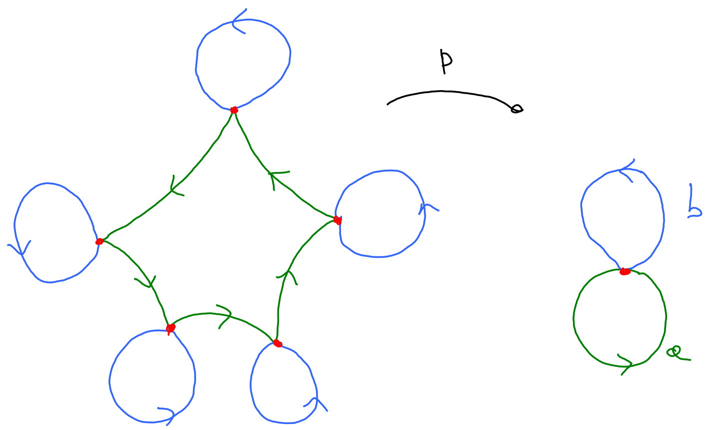
(1) Si dica se p è regolare.
(2) Si calcoli il grado di p.
(3) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta a, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(4) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta a^n, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Per quali n il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(5) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta b, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(6) Ci si convinca che la mappa $p\colon E \to X$ è descritta dal disegno qui sotto.



Sol. (sketch). (1): $\ker\varphi$ è un sottogruppo normale, dunque p è regolare. (2): Poiché φ è surgettivo, $\ker\varphi$ ha indice uguale alla cardinalità di $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$. Dunque il grado di p è 3. (3) e (4): Per quanto visto a lezione, se $[\gamma] = a$, allora γ^n si solleva ad un laccio se e solo se $a^n \in \ker\varphi$, cioè se e solo se n è un multiplo di 3. (5): Sì. Poiché l'azione degli automorfismi è transitiva, qualsiasi sollevamento di γ (ce ne sono 3) è un laccio. (6): Segue da tutte le considerazioni precedenti.

22. Siano X, x_0, a, b come nell'esercizio precedente, e sia $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(5\mathbb{Z})$ l'omomorfismo tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Sia infine $p\colon E \to X$ il rivestimento associato a $\ker\varphi$ (si veda l'esercizio precedente). Si disegni E.

Eccolo:



23. In questo esercizio diamo una dimostrazione alternativa (e, francamente, più semplice di quella che ho fatto a lezione) del Teorema di Borsuk-Ulam. Per assurdo, sia $f\colon S^2 \to S^1$ una funzione continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$.

(1) Sia $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ il rivestimento universale. Si mostri che esiste $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$ tale che $p \circ g = f$.
(2) Sia $k\colon S^2 \to \mathbb{R}$ data da $k(x) = g(x) - g(-x)$. Si mostri che esiste $x_0 \in S^2$ con $k(x_0) = 0$ (suggerimento: si usi che S^2 è connesso, e la caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$).
(3) Si osservi che $g(x_0) = g(-x_0)$, per cui $f(x_0) = f(-x_0)$, contro le ipotesi.

Sol. (sketch). (1) segue dai teoremi di sollevamento, poiché S^2 è semplicemente connesso. (2): Se $k(x) = 0$ per ogni $x \in S^2$ abbiamo finito. Altrimenti esiste $x_1 \in S^2$ con $k(x_1) \neq 0$. Allora $k(-x_1) = -k(x_1)$, per cui l'immagine di k contiene un numero positivo e un numero negativo. Essendo un connesso di $\mathbb{R}$, tale immagine contiene anche 0, il che prova (2). Il fatto che $k(x_0) = 0$ è esattamente equivalente al fatto che $g(x_0) = g(-x_0)$, da cui discenderebbe $f(x_0) = p(g(x_0)) = p(g(-x_0)) = f(-x_0)$.

24. Sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$. Si mostri che esiste $x_0 \in S^2$ tale che $f(x_0) = 0$.

Sol. (sketch). Se così non fosse, normalizzando f si otterrebbe una funzione che viola il Teorema di Borsuk-Ulam.

25. (Teorema del panino con prosciutto e formaggio). Siano B, H, C tre insiemi misurabili limitati di $\mathbb{R}^3$ con misura positiva (per svolgere l'esercizio non è necessario sapere cosa ciò vuol dire; si veda sotto). Si supponga inoltre che B sia connesso. Vogliamo dimostrare che esiste un piano affine $P \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che, detti P^+ e P^- i semispazi bordati da P, si abbia che

$$\mu(B \cap P^+) = \mu(B \cap P^-) \ , \quad \mu(H \cap P^+) = \mu(H \cap P^-) \ , \quad \mu(C \cap P^+) = \mu(C \cap P^-) \ ,$$

dove μ indica la misura sopra menzionata. In altre parole, si può secare un panino con prosciutto e formaggio con un piano che divida in parti di volume uguale sia il pane, sia il prosciutto, sia il formaggio.

Useremo il seguente fatto: siano $R > 0$ ed A un aperto limitato misurabile. Allora le funzioni

$$\mu_A^+ \colon S^2 \times [-R, R] \to \mathbb{R} \ , \quad \mu_A^+(v,t) = \mu\left(A \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v\rangle \geq t\}\right) \ ,$$
$$\mu_A^- \colon S^2 \times [-R, R] \to \mathbb{R} \ , \quad \mu_A^-(v,t) = \mu\left(A \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v\rangle \leq t\}\right)$$

sono continue e $\mu(A) = \mu_A^+(v,t) + \mu_A^-(v,t)$ per ogni $(v,t) \in S^2 \times [-R, R]$. Inoltre, μ_A^+ è debolmente decrescente e μ_A^- è debolmente crescente.

Sia $R > 0$ tale che B, H, C siano interamente contenuti nella palla di centro 0 e raggio R in $\mathbb{R}^3$, e sia $Z \subseteq S^2 \times [-R, R]$ l'insieme dato da $Z = \{(v,t) \mid \mu_B^+(v,t) = \mu_B^-(v,t)\}$.

(1) Si mostri che Z è chiuso in $S^2 \times [-R, R]$, e che la proiezione $\pi \colon Z \to S^2$ sul primo fattore è bigettiva. (Per la surgettività di π, bisogna sfruttare che B è connesso; l'iniettività discende dal fatto che B è aperto, il che implica che, se $\mu_B^+(v_0, t_0) \neq 0$, allora $\mu_B^+(v_0, \cdot)$ è *strettamente* decrescente in un intorno di t_0, e se $\mu_B^-(v_0, t_0) \neq 0$, allora $\mu_B^-(v_0, \cdot)$ è *strettamente* crescente in un intorno di t_0; questi fatti possono essere assunti).

(2) Si mostri che Z è omeomorfo a S^2.

(3) Si mostri che $(v,t) \in Z$ se e solo se $(-v, -t) \in Z$.

(4) Sia $f \colon Z \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(v,t) = (\mu_H^+(v,t) - \mu_H^-(v,t), \mu_C^+(v,t) - \mu_C^-(v,t)) \ ,$$

e sia $g = f \circ \pi^{-1} \colon S^2 \to \mathbb{R}^2$. Si mostri che $g(-x) = -g(x)$ per ogni $x \in S^2$.

(5) Si mostri che esiste $z_0 \in Z$ tale che $f(z_0) = 0$ (si usino il punto precedente e l'Esercizio 24).

Sol. (sketch). (1): La funzione $\mu_B^+ - \mu_B^-$ è continua, per cui Z, essendone la preimmagine di 0, è chiuso. Fissato $v \in S^2$, la funzione $t \mapsto \mu_B^+(v,t) - \mu_B^-(v,t)$ assume valori sia positivi sia negativi, per cui assume anche il valore nullo. Ciò mostra che esiste $(v, t_0) \in Z$, perciò π è surgettiva. Poiché $\mu(B) > 0$, abbiamo $\mu_B^+(v, t_0) = \mu_B^-(v, t_0) = \mu_B(v, t_0)/2$, per cui $t \mapsto \mu_B^+(v,t) - \mu_B^-(v,t)$ è debolmente decrescente su $[-R, R]$ e strettamente decrescente in un intorno di t_0. Ciò basta per provare che t_0 ne è l'unico zero, cioè che π è iniettiva.

(2): $\pi \colon Z \to S^2$ è bigettiva tra uno spazio compatto (in quanto chiuso in un compatto) e uno spazio di Hausdorff.

(3): Segue dalle definizioni.

(4): Per (3), se $\pi^{-1}(v) = (v,t)$, allora $\pi^{-1}(-v) = (-v, -t)$. La tesi segue ora dal fatto che $\mu_A^+(v,t) = \mu_A^-(-v,-t)$ per ogni insieme misurabile A (il che segue immediatamente dalle definizioni).

(5): Se g è come al punto precedente, allora per l'Esercizio 24 esiste $v_0 \in S^2$ con $g(v_0) = 0$, per cui $z_0 = \pi^{-1}(v_0) \in Z$ verifica $f(z_0) = 0$.