Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Secondo foglio di Esercizi

1. Sia X lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in $[0,1]$, dotato della metrica d_∞. Si mostri che X è limitato ma non totalmente limitato.

2. Sia X uno spazio metrico, e sia $Y \subseteq X$ dotato della metrica indotta. Si mostri che, se Y è totalmente limitato, anche $\overline{Y}$ è totalmente limitato. Se ne deduca che se X è completo e Y è totalmente limitato, allora Y è relativamente compatto (un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice relativamente compatto se la sua chiusura nello spazio ambiente è compatta).

3. Sia X la retta di Sorgenfrey. Questo esercizio mostra che i sottoinsiemi compatti di X sono necessariamente numerabili. Sia C un sottoinsieme compatto di X.

(1) Sia $x \in C$. Si mostri che esiste $\varepsilon > 0$ tale che
$$C \cap (x-\varepsilon, x] = \{x\} \ .$$
(Suggerimento: si consideri il ricoprimento aperto di C ottenuto a partire dagli aperti della forma $(-\infty, x-1/n)$ e $[x, +\infty)$).

(2) Sfruttando la densità dei razionali in $\mathbb{R}$ (con l'usuale topologia euclidea, o con quella di X), si concluda che C è al più numerabile.

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $n \geq 2$. Si mostri che esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f^{-1}(x)$ è vuoto o più che numerabile per ogni $x \notin \{x_1, x_2\}$. (Può essere utile ricordare il fatto, dimostrato a lezione, che un sottoinsieme numerabile non sconnette $\mathbb{R}^n$ se $n \geq 2$).

5. In tutto l'esercizio, $\mathbb{C}^n$ ed i suoi sottospazi saranno dotati della topologia euclidea indotta dall'identificazione $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Questo esercizio mostra che il complementare del luogo di zeri di un polinomio in $\mathbb{C}^n$ è connesso per archi. Sia $n \geq 1$ e sia $p\colon \mathbb{C}^n \to C$ un polinomio non nullo. Sia anche
$$V = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, p(z_1, \ldots, z_n) = 0\} \ .$$

(1) Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n \setminus V$, e sia $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ definita da $\alpha(z) = zx_1 + (1-z)x_2$. Si mostri che l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,|\, p(\alpha(z)) \neq 0\}$ è connesso per archi.

(2) Si mostri che $\mathbb{C}^n \setminus V$ è connesso per archi.

(3) Sia $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine n a coefficienti in $\mathbb{C}$, dotato della topologia di sottospazio delle matrici quadrate di ordine n (che sono a loro volta identificate con $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$). Si mostri che $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è connesso per archi. (Il determinante è un polinomio!).

(4) Si mostri che, invece, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è sconnesso per ogni $n \geq 1$.

6. Vedremo nell'Esercizio 16 che $\mathbb{N}$ ammette una topologia connessa e di Hausdorff.

(1) Si mostri che $\mathbb{N}$ ammette una topologia compatta e di Hausdorff.
(2) Sfruttando la teoria degli spazi di Baire, si mostri che $\mathbb{N}$ non ammette una topologia connessa, compatta e di Hausdorff.

7. Sia $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$, dotato della *box topology*, una cui base è data dagli insiemi della forma

$$A = \prod_{t \in [0,1]} U_x \ ,$$

dove $U_t \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto di $\mathbb{R}$ per ogni $t \in [0,1]$.

(1) Sia $h\colon [0,1] \to X$ definita da $h(x) = c_x$, dove $c_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione costantemente uguale a x, cioè $c_x(t) = x$ per ogni $t \in [0,1]$. Si dica se h sia continua.
(2) Sia $f_n \in X$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, dove $f \in X$. Si mostri che esistono un sottoinsieme finito $F \subseteq [0,1]$ ed $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che $f_n(t) = f(t)$ per ogni $t \in [0,1] \setminus F$, $n \geq n_0$.

8. Sia X uno spazio di Hausdorff compatto, e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso.

(1) Si mostri che X/K è di Hausdorff.
(2) Si mostri che X/K è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $X \setminus K$.

9. Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$n \cdot v = 2^n v \ .$$

(1) Si mostri che $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}$ non è di Hausdorff.
(2) Si consideri la restrizione dell'azione di $\mathbb{Z}$ ad $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Si mostri che $\Omega/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a $S^2 \times S^1$.

10. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ data da $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Z}$, sia $X = \mathbb{R}/\sim$ e sia $\pi\colon \mathbb{R} \to X$ la proiezione al quoziente. Abbiamo visto a lezione che π è aperta, e $X \cong S^1$. Dato $Z \subseteq \mathbb{R}$, si consideri la restrizione $\sim'$ a Z della relazione di equivalenza $\sim$, ovvero per $x, y \in Z$ poniamo $x \sim' y$ se e solo se $x \sim y$.

Si dica se $Z/\sim'$ è omeomorfo a $\pi(Z) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nei seguenti casi:

$$Z = [0,1]\,, \quad Z = [0,1)\,, \quad Z = \{n + 2^{-n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \ .$$

11. Sia $f\colon X \to Y$ un'identificazione, e sia $Z \subseteq X$.

(1) È vero che $f|_Z\colon Z \to f(Z)$ è un'identificazione? (Si veda l'esercizio precedente).
(2) Supponiamo che Z sia f-saturo. È vero che $f|_Z\colon Z \to f(Z)$ è un'identificazione?
(3) Supponiamo che Z sia un aperto f-saturo. È vero che $f|_Z\colon Z \to f(Z)$ è un'identificazione?

12. (Teorema delle contrazioni). Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $f: X \to X$ una funzione tale che $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$, dove $k < 1$ è una costante.

(1) Sia $x_0 \in X$. Si mostri che la successione definita da $x_n = f^n(x)$ è di Cauchy.
(2) Si mostri che la funzione f ha esattamente un punto fisso.
(3) Si esibisca una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ priva di punti fissi e tale che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x \neq y$.

13. Sia $f: (X, d) \to (X, d)$ un embedding isometrico. Si mostri che se X è compatto, allora f è bigettivo. (Suggerimento: si assuma per assurdo che f non sia surgettiva, e si scelga $x_0 \in X \setminus f(X)$; si mostri che la successione $x_n = f^n(x_0)$ non ammette sottosuccessioni convergenti).

14. Sia $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/q$ se $x = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dove $p, q \in \mathbb{N}$ sono coprimi; $f(x) = 1$ se $x = 0$; $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Si mostri che f è continua in x se e solo se $x \notin \mathbb{Q}$.

15. Sia $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Per ogni $x \in [0, 1]$, sia $\omega_g(x)$ l'*oscillazione* di g in x, cioè la quantità definita come segue

$$\omega_g(x, \varepsilon) = \sup\{|g(y) - g(y')|\,,\ |y - x| < \varepsilon,\ |y' - x| < \varepsilon\}\,, \quad \omega_g(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \omega_g(x, \varepsilon)\ .$$

(1) Si mostri che g è continua in x se e solo se $\omega_g(x) = 0$.
(2) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $C_n = \{x \in [0, 1] \,|\, \omega_g(x) \geq 1/n\}$ è chiuso in $[0, 1]$.
(3) Sia $A \subseteq [0, 1]$ l'insieme dei punti di continuità di g. Si mostri che, se A è denso, allora l'insieme dei punti di discontinuità di g è di prima categoria.
(4) Si concluda che non esistono funzioni limitate $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ i cui punti di discontinuità coincidano con l'insieme degli irrazionali. (Si confronti questo risultato con l'esercizio precedente).

16. Sia $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, dove $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'insieme $\{0, 1\}$ è dotato della topologia discreta, e X della topologia prodotto. Sia

$$f: X \to \mathbb{R}\,, \qquad f((i_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}\ .$$

(1) Si mostri che f è iniettiva, e se ne deduca che $C = f(X)$ ha la cardinalità del continuo.
(2) Si mostri che f è un'immersione topologica, per cui X è omeomorfo a $f(X) = C \subseteq \mathbb{R}$.
(3) Si mostri che C è un sottoinsieme perfetto e totalmente sconnesso di $\mathbb{R}$ (noto con il nome di *insieme di Cantor*).

17. (Verso i p-adici). Sia $p \geq 2$ un numero primo. Per $n \geq 1$ sia $\alpha(n)$ il più grande intero tale che $p^{\alpha(n)}$ divida n. Sia poi $d\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = m \\ p^{-\alpha(|n-m|)} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Si mostri che d è una distanza, invariante per traslazioni.
(2) Si esibisca una successione convergente rispetto a d e definitivamente non costante.
(3) Si mostri che la distanza d non è completa. (Suggerimento: per (2), esiste un punto di $\mathbb{Z}$ non isolato, dunque per (1) nessun punto di $\mathbb{Z}$ è isolato; si applichi ora la teoria di Baire. In alternativa, si esibisca una successione di Cauchy non convergente).

18. Per ogni coppia di numeri naturali $a, b \in \mathbb{N}^*$ relativamente primi poniamo

$$N_{a,b} = \{a + kb \,|\, k \in \mathbb{N}\} \ .$$

(1) Si mostri che la famiglia $\{N_{a,b} \,|\, \mathrm{MCD}(a,b) = 1\}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}^*$, e sia X lo spazio topologico $(\mathbb{N}^*, \mathcal{T})$.
(2) Si mostri che X è T_2.
(3) Si mostri che tutti i multipli di b appartengono a $\overline{N_{a,b}}$.
(4) Si mostri che X è connesso.

19. Sia C un sottinsieme perfetto non vuoto di $\mathbb{R}$. Abbiamo visto a lezione che C è più che numerabile. Questo esercizio mostra che in realtà C ha necessariamente la cardinalità del continuo. Costruiamo una funzione

$$f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to P$$

come segue.

Si scelga $x \in P$ a caso, e sia $\varepsilon_0 = 1$. Poiché P è perfetto, esistono $x_0, x_1 \in P \cap (B(x, \varepsilon_0) \setminus \{x\})$ distinti. Scegliamo ora $\varepsilon_1 \leq 2^{-1}$ tale che

$$B(x_0, \varepsilon_1) \cup B(x_1, \varepsilon_1) \subseteq B(x, \varepsilon_0) \setminus \{x\}\,, \quad \overline{B(x_0, \varepsilon_1)} \cap \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} = \emptyset$$

(perché è possibile?).

Poiché P è perfetto, per $i = 0, 1$ esistono $x_{i0}, x_{i1} \in P \cap (B(x_i, \varepsilon_1) \setminus \{x_i\})$ distinti. Scegliamo poi $\varepsilon_2 \leq 2^{-2}$ tale che

$$B(x_{i0}, \varepsilon_2) \cup B(x_{i1}, \varepsilon_2) \subseteq B(x_i, \varepsilon_1) \setminus \{x_i\}\,, \quad \overline{B(x_{i0}, \varepsilon_2)} \cap \overline{B(x_{i1}, \varepsilon_2)} = \emptyset$$

(di nuovo, perché è possibile?). Si osservi che, per costruzione, gli insiemi

$$\overline{B(x_{00}, \varepsilon_2)}, \quad \overline{B(x_{01}, \varepsilon_2)}, \quad \overline{B(x_{10}, \varepsilon_2)}, \quad \overline{B(x_{11}, \varepsilon_2)}$$

sono a due a due disgiunti.

(1) Procedendo come sopra, si costruiscano una successione di reali positivi $\varepsilon_n < 2^{-n}$ e, per ogni successione finita di indici $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$, un punto $x_{i_0 i_1 \ldots i_n} \in P$ tali che, per ogni scelta di tali indici,

$$B(x_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}, \varepsilon_n) \cup B(x_{i_1 \ldots i_{n-1} 1}, \varepsilon_n) \subseteq B(x_{i_1 \ldots i_{n-1}, \varepsilon_{n-1}}) \setminus \{x_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}\}\,,$$

$$\overline{B(x_{i_1\dots i_{n-1}0},\varepsilon_n)} \cap \overline{B(x_{i_1\dots i_{n-1}1},\varepsilon_n)} = \emptyset\ .$$

(2) Si mostri che, per ogni successione infinita $I = (i_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, se $t_n(I) = (i_1,\dots,i_n)$ è la troncatura di I ottenuta considerando solo i primi n indici, allora la successione

$$n \mapsto x_{t_n(I)}$$

è di Cauchy, ed ammette perciò limite $x_I = f(I) \in \mathbb{R}$.

(3) Si mostri che $x_I = f(I) \in P$, e che la funzione $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to P$ così definita è iniettiva. Dunque P ha almeno la cardinalità del continuo. D'altronde, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme P ha al più la cardinalità del continuo.

(4) Si mostri che P contiene un sottoinsieme omeomorfo all'insieme di Cantor (si veda l'Esercizio 16).