

# NOTE SUL CALCOLO DI FOX

ROBERTO FRIGERIO

## 1. IL MODULO DI ALEXANDER DI UNA VARIETÀ

Sia  $(M, x_0)$  uno spazio puntato connesso per archi, e poniamo

$$G = \pi_1(M, x_0) .$$

Supponiamo anche che  $M$  sia semilocalmente semplicemente connesso, in modo che ad ogni sottogruppo di  $G$  corrisponda un rivestimento di  $(M, x_0)$  (unico a meno di isomorfismo). Fissiamo poi un sottogruppo  $K$  di  $G$  che contenga  $G' = [G, G]$ . È immediato verificare che  $K$  è necessariamente normale. Poniamo

$$H = G/K$$

e denotiamo con  $p: \widetilde{M} \rightarrow M$  il rivestimento associato a  $K$ . Poiché  $K$  è normale,  $\widetilde{M}$  è regolare ed il gruppo degli automorfismi di  $\widetilde{M}$  è canonicamente isomorfo a  $H$ .

Denotiamo con  $\widetilde{M}_0 = p^{-1}(x_0)$  la preimmagine in  $\widetilde{M}$  del punto base in  $M$ . È ovvio che il gruppo  $H$  degli automorfismi di  $\widetilde{M}$  agisce sulla coppia  $(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0)$ , per cui lo  $\mathbb{Z}$ -modulo

$$A(\widetilde{M} \rightarrow M) = H_1(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0; \mathbb{Z})$$

ammette una struttura di  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo (si veda la sezione 2 per la definizione di  $\mathbb{Z}[H]$ ). Analogamente, anche il modulo

$$A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) = H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$$

ammette una naturale struttura di  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo. Nel caso in cui si abbia  $K = G'$ , il modulo  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  (risp.  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$ ) sarà denotato semplicemente con  $A(M)$  (risp.  $A_0(M)$ ), e prende il nome di *modulo di Alexander* (risp. *modulo di Alexander ridotto*) di  $M$ . D'ora in poi, tutti i moduli di omologia saranno considerati a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .

**1.1. Modulo e ideali di Alexander di link.** Saremo particolarmente interessati al caso in cui  $M = C(L)$  sia il complementare di un link, e  $K = G'$ . In tal caso  $H \cong \mathbb{Z}^n$ , dove  $n$  è il numero di componenti di  $L$ . Inoltre,  $H$  ammette una base preferita, data dai meridiani delle componenti di  $L$ , per cui si ha un isomorfismo canonico

$$\mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] .$$

Indicheremo con  $A(L)$  (risp.  $A_0(L)$ ) lo  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -modulo  $A(C(L))$  (risp.  $A_0(C(L))$ ). Mostriamo che  $A(L)$  è finitamente presentato, e denoteremo con  $E_i(L)$ ,  $\Delta_i(L)$  gli ideali e i polinomi di Alexander di  $A(L)$ , che verranno chiamati semplicemente ideali e polinomi di Alexander di  $L$ .

**1.2. La successione di Crowell.** Analizziamo brevemente le relazioni che sussistono tra  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$  e  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ , sulle quali torneremo anche più avanti. La successione della coppia  $(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0)$  fornisce una successione esatta

$$H_1(\widetilde{M}_0) \longrightarrow H_1(\widetilde{M}) \longrightarrow H_1(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0) \xrightarrow{\partial} H_0(\widetilde{M}_0) \longrightarrow H_0(\widetilde{M})$$

Si ha ovviamente  $H_1(\widetilde{M}_0) = 0$ . Inoltre, l'applicazione  $\mathbb{Z}[H] \rightarrow H_0(\widetilde{M}_0)$ ,  $\sum_i n_i h_i \mapsto \sum_i n_i h_i \tilde{x}_0$  stabilisce un'identificazione tra  $\mathbb{Z}[H]$  e  $H_0(\widetilde{M}_0)$ . D'altro canto, si ha ovviamente  $H_0(\widetilde{M}) = \mathbb{Z}$ , ed è immediato verificare che, posto

$$\varepsilon: \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{Z} \quad \varepsilon \left( \sum_{h \in H} a_h h \right) = \sum_{h \in H} a_h ,$$

il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_0(\widetilde{M}_0) & \longrightarrow & H_0(\widetilde{M}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z}[H] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \end{array}$$

è commutativo. Poniamo

$$I(H) = \ker \varepsilon \subseteq \mathbb{Z}[H] .$$

L'ideale  $I(H)$  prende il nome di *ideale di augmentazione* di  $\mathbb{Z}[H]$  (vedi anche la sottosezione 2.1). La successione esatta sopra descritta si traduce dunque nella successione esatta seguente:

$$0 \longrightarrow A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) \longrightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M) \longrightarrow I(H) \longrightarrow 0 ,$$

che prende il nome di *successione di Crowell* del rivestimento  $\widetilde{M}$ .

**1.3. Elementi di  $G$  come elementi di  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ .** Lo scopo principale di queste note è mostrare come sia possibile dedurre una presentazione di  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  a partire da (una presentazione di)  $G$ . Fissiamo un punto base  $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}_0 \subseteq \widetilde{M}$ , e osserviamo che si ha  $\widetilde{M}_0 = H \cdot \{\tilde{x}_0\}$ . Un laccio  $\gamma \subseteq M$  basato in  $x_0$  ammette un unico sollevamento  $\tilde{\gamma}$  basato in  $\tilde{x}_0$ . Tale sollevamento, naturalmente, non sarà chiuso in generale; lo sarà se e solo se  $\gamma$  definisce un elemento di  $K$ . In ogni caso, entrambi gli estremi di  $\tilde{\gamma}$  appartengono a  $\widetilde{M}_0$ , per cui l'1-simplesso  $\tilde{\gamma}$  definisce un elemento di  $Z_1(\widetilde{M}; \widetilde{M}_0)$ . Poiché lacci omotopi (con estremi fissi) si sollevano a lacci omotopi (con estremi fissi) l'associazione  $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$  passa al quoziente definendo un'applicazione

$$G \rightarrow H_1(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0), \quad g \mapsto \tilde{g} .$$

Sia  $\psi: G \rightarrow H$  la mappa di proiezione al quoziente. Siano  $[\gamma_1] = g_1$  e  $[\gamma_2] = g_2$  due elementi di  $\pi_1(M, x_0)$ . Il sollevamento  $\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}$  coincide con la concatenazione di  $\widetilde{\gamma_1}$  con il sollevamento di  $\gamma_2$  a partire da  $\widetilde{\gamma_1}(1)$ , che non è altro che  $\psi(\gamma_1) \cdot \widetilde{\gamma_2}$ . Sfruttando il fatto che la concatenazione di 1-simplessi è omologa alla loro somma, se ne deduce la formula

$$(1) \quad \widetilde{g_1 g_2} = \widetilde{g_1} + \psi(g_1) \cdot \widetilde{g_2} .$$

Se ne deduce, tra l'altro, che per ogni  $g \in G$  si ha  $0 = \widetilde{gg^{-1}} = \widetilde{g} + \psi(g) \cdot \widetilde{g^{-1}}$ , per cui

$$(2) \quad \widetilde{g^{-1}} = -\psi(g)^{-1} \widetilde{g}, \quad g \in G$$

(la ragione "geometrica" di questa uguaglianza è peraltro chiara).

**1.4. Prime relazioni tra una presentazione di  $G$  e la struttura di  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ .** Sia ora

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

una presentazione di  $G$ , denotiamo con  $\phi: F(s_1, \dots, s_n) \rightarrow G$  l'epimorfismo definito dalla presentazione, e poniamo  $\overline{s_i} = \phi(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Per semplicità, denoteremo con  $\widetilde{s_i}$  l'elemento  $\widetilde{\overline{s_i}} \in A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ .

Dimostriamo più avanti che gli  $\widetilde{s_i}$  generano l'intero modulo  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Saremo quindi interessati a capire quali relazioni (su  $\mathbb{Z}[H]$ ) intercorrono tra gli  $\widetilde{s_i}$ . Naturalmente, ogni relazione  $r_i$  (pensata come parola negli  $s_i$  che viene mappata da  $\phi$  nell'elemento nullo di  $G$ ) si solleva all'elemento nullo di  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Applicando più volte la regola descritta nell'equazione (1), è possibile dedurre da questa semplice osservazione che ogni relazione nella presentazione di  $G$  definisce una relazione tra gli  $\widetilde{s_i}$  in  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Il calcolo di Fox consente una formalizzazione economica ed elegante di quanto appena asserito. Prima di definire la derivata di Fox, è necessario fornire alcuni risultati basilari relativi alla teoria degli anelli gruppo.

## 2. PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEGLI ANELLI GRUPPO

Sia  $G$  un qualsiasi gruppo, e denotiamo con  $\mathbb{Z}[G]$  l'anello gruppo di  $G$ . Come insieme,  $\mathbb{Z}[G]$  coincide con lo  $\mathbb{Z}$ -modulo libero su  $G$ , ovvero con l'insieme delle combinazioni lineari (finite!) di elementi di  $G$ . L'insieme  $\mathbb{Z}[G]$  è un anello con le operazioni

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) + \left( \sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g, h \in G} a_g b_h (gh) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in G} a_{gh} b_{h^{-1}} \right) g$$

(la buona definizione del prodotto dipende dal fatto che i coefficienti  $a_g$  e  $b_h$  sono nulli eccetto che per un numero finito di elementi  $g, h \in G$ ). Si hanno le ovvie inclusioni

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[G], \quad a \mapsto a \cdot 1, \quad G \hookrightarrow \mathbb{Z}[G], \quad g \mapsto 1 \cdot g$$

dove indichiamo indifferentemente con 1 sia l'unità di  $\mathbb{Z}$  sia l'elemento neutro di  $G$ . Indicheremo inoltre semplicemente con  $a$  l'elemento  $a \cdot 1$  e con  $g$  l'elemento  $1 \cdot g$ . Con queste convenzioni, è ovvio che  $\mathbb{Z}[G]$  ammette l'unità data da 1. Inoltre,  $\mathbb{Z}[G]$  è commutativo se e solo se lo è  $G$ .

**2.1. Omomorfismi di  $G$  e ideali di  $\mathbb{Z}[G]$ .** In quanto segue, con il termine *ideale* di  $\mathbb{Z}[G]$  si intenderà sempre un ideale bilatero di  $\mathbb{Z}[G]$ . In particolare, diremo che un ideale  $I$  di  $\mathbb{Z}[G]$  è generato dall'insieme  $S$  se  $I$  è il più piccolo ideale che contiene  $S$ , ovvero gli elementi di  $I$  sono tutti e soli gli elementi della forma

$$\sum_{s \in S} a_s b_s, \quad a_s \in \mathbb{Z}[G], \quad b_s \in \mathbb{Z}[G]$$

(dove si intende che la somma sia finita anche qualora  $S$  sia infinito).

Se  $K$  è un sottogruppo di  $G$ , indichiamo con  $I_G(K)$  l'ideale generato dagli elementi della forma  $k - 1$ ,  $k \in K$ . Naturalmente, ogni omomorfismo di gruppi  $\psi: G \rightarrow H$  induce un omomorfismo di anelli  $\bar{\psi}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[H]$ . È immediato verificare che  $\bar{\psi}$  è iniettivo (risp. surgettivo) se e solo se lo è  $\psi$ .

**Lemma 2.1.** *Sia  $\psi: G \rightarrow H$  un omomorfismo, sia  $K = \ker \psi$  e si supponga che  $k_1, \dots, k_n$  generino normalmente  $K$  (ovvero che  $K$  sia il più piccolo sottogruppo normale di  $G$  che contiene  $k_1, \dots, k_n$ ). Detta  $\bar{\psi}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[H]$  l'applicazione indotta da  $\psi$ , si ha*

$$\ker \bar{\psi} = I(K) = (k_1 - 1, \dots, k_n - 1).$$

*Dimostrazione.* Le inclusioni  $\ker \bar{\psi} \supseteq I(K) \supseteq (k_1 - 1, \dots, k_n - 1)$  sono ovvie, per cui basta dimostrare che  $\ker \bar{\psi}$  è contenuto nell'ideale generato dai  $k_i - 1$ . Sia  $J$  tale ideale, e consideriamo la proiezione al quoziente  $\pi: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]/J$ . L'insieme  $K' = \{g \in G \mid \pi(g) = [1]\} \subseteq G$  è un sottogruppo normale di  $G$  che contiene  $k_1, \dots, k_n$ , per cui  $K \subseteq K'$ . Ne segue che è ben definito l'omomorfismo di anelli  $\eta: \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{Z}[G]/J$  tale che  $\eta(\sum_{h \in H} a_h h) = \sum_h a_h [g_h]$ , dove  $g_h \in G$  è un qualsiasi elemento tale che  $\psi(g_h) = h$ . È chiaro che  $\pi = \eta \circ \bar{\psi}$ , per cui  $\ker \bar{\psi} \subseteq J$ .  $\square$

L'applicazione costante  $G \rightarrow \{1\}$  induce la così detta mappa di augmentazione  $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ , il cui kernel è pertanto uguale a  $I(G)$ . L'ideale  $I(G)$  prende perciò il nome di *ideale di augmentazione*. È immediato verificare che se  $\bar{\psi}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[H]$  è indotto da  $\psi: G \rightarrow H$  allora  $\bar{\psi}^{-1}(I(H)) = I(G)$ . Se inoltre  $\psi$  è surgettivo, allora  $\bar{\psi}(I(G)) = I(H)$ .

3. I MODULI DI ALEXANDER DI  $G$ 

**3.1. Il modulo di Alexander ridotto  $A_0(G, K)$ .** Sia ora  $K$  un sottogruppo normale di  $G$  tale che  $G' \subseteq K$ , sia  $H = G/K$ , e sia  $\psi: G \rightarrow H$  la proiezione al quoziente. Come nella sezione iniziale, siano inoltre  $M$  uno spazio topologico tale che  $\pi_1(M) = G$  e  $\widetilde{M}$  il rivestimento di  $M$  associato a  $K$ . Come già osservato, i moduli di Alexander  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$  e  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  ammettono una naturale struttura di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli. Tramite tecniche puramente algebriche, costruiremo ora degli  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli  $A_0(G, K)$  e  $A(G, K)$  che risulteranno essere naturalmente isomorfi a  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$  e  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Per il Teorema di Hurewicz l'applicazione

$$K \rightarrow H_1(\widetilde{M}), \quad k \mapsto \widetilde{k}$$

induce un isomorfismo di gruppi abeliani tra  $K/K'$  e  $H_1(\widetilde{M}) = A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Poniamo perciò  $A_0(G, K) = K/K'$  e denotiamo con

$$\theta_0: A_0(G, K) \rightarrow A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$$

tale isomorfismo. Poiché  $K$  e  $K'$  sono sottogruppi normali di  $G$ , è ben definita l'azione di  $G$  su  $K/K'$  definita da  $g \cdot [k] = [gkg^{-1}]$ . Inoltre, se  $g \in K$  allora gli elementi  $gkg^{-1}$  e  $k$  appartengono alla stessa classe laterale di  $K'$ , per cui  $g$  agisce come l'identità. Dunque il gruppo abeliano  $A_0(G, K)$  ammette una naturale struttura di  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo tramite l'estensione per  $\mathbb{Z}$ -linearità dell' $H$ -azione

$$G/K \times K/K' \rightarrow K/K', \quad [g] \cdot [k] = [gkg^{-1}].$$

**Lemma 3.1.** *La mappa*

$$\theta_0: A_0(G, K) \rightarrow A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$$

*è un isomorfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che, se  $g \in G$  e  $k \in K$ , si ha

$$\widetilde{gkg^{-1}} = \widetilde{g} + \psi(g)\widetilde{k} - \psi(gkg^{-1})\widetilde{g} = \psi(g)\widetilde{k}.$$

□

**3.2. Il modulo di Alexander  $A(G, K)$ .** Consideriamo ora il modulo

$$A(G, K) = I(G)/(I(K)I(G)).$$

Nel caso in cui  $K = G'$ , tale modulo viene indicato con il simbolo  $A(G)$ , e prende il nome di *modulo di Alexander* di  $G$ . Infatti, come vedremo in seguito, il modulo  $A(G, K)$  è isomorfo ad  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Cominciamo con il definire una mappa  $\theta: A(G, K) \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Sia  $\theta': \mathbb{Z}[G] \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  l'applicazione che estende per  $\mathbb{Z}$ -linearità la mappa  $g \mapsto \widetilde{g}$ . Dal fatto che  $\theta'(g_1g_2) = \theta'(g_1) + \psi(g_1)\theta'(g_2)$  per ogni  $g_1, g_2 \in G$  è immediato dedurre che

$$\theta'(c_1c_2) = \theta'(c_1)\varepsilon(c_2) + \overline{\psi}(c_1) \cdot \theta'(c_2)$$

per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}[G]$ .

**Lemma 3.2.** *La restrizione dell'applicazione  $\theta'$  all'ideale  $I(G)$  passa al quoziente definendo una mappa*

$$\theta: A(G, K) \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M) .$$

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che  $\theta'$  si annulla su  $I(K)I(G)$ . Segue dalle definizioni che un elemento di  $I(K)I(G)$  è somma di elementi della forma  $zw$ , dove  $z \in I(K)$  e  $w \in I(G)$ . Si ha

$$\theta'(zw) = \theta'(z)\varepsilon(w) + \overline{\psi}(z)\theta'(w)$$

Ma  $\varepsilon(w) = 0$  in quanto  $w \in I(G)$ , e  $\overline{\psi}(z) = 0$  in quanto  $z \in I(K)$ , da cui la tesi.  $\square$

Notiamo ora che se  $z \in I(K)$  e  $w \in I(G)$ , allora ovviamente  $zw \in I(K)I(G)$ . Ne segue che l'azione per moltiplicazione a sinistra di  $\mathbb{Z}[G]$  su  $I(G)$  definisce per passaggio al quoziente un'azione di  $\mathbb{Z}[G]/I(K) = \mathbb{Z}[H]$  su  $A(G, K)$ .

**Proposizione 3.3.** *L'applicazione  $\theta: A(G, K) \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  è un morfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che, se  $z \in \mathbb{Z}[G]$  e  $w \in I(G)$ , allora

$$\theta(z \cdot w) = \theta(z)\varepsilon(w) + \psi(z) \cdot \theta(w) = \psi(z) \cdot \theta(w) .$$

$\square$

Cerchiamo ora di costruire una mappa  $\alpha: A_0(G, K) \rightarrow A(G, K)$ . Se  $k_1, k_2$  sono elementi di  $K$ , allora l'elemento

$$(k_1 k_2 - 1) - ((k_1 - 1) + (k_2 - 1)) = (k_1 - 1)(k_2 - 1)$$

appartiene a  $I(K)I(G)$  (in effetti, appartiene a  $I(K)^2 \subseteq I(K)I(G)$ ), per cui l'applicazione

$$K \rightarrow A(G, K), \quad k \mapsto [k - 1]$$

definisce un morfismo di gruppi tra  $K$  (dove l'operazione è la moltiplicazione) e  $A(G, K)$  (dove l'operazione è la somma). Poiché  $A(G, K)$  è abeliano, tale applicazione passa ovviamente al quoziente definendo una mappa

$$\alpha: A_0(G, K) \rightarrow A(G, K), \quad \alpha([k]) = [k - 1] .$$

Verifichiamo che  $\alpha$  è un morfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli. A tale scopo è sufficiente osservare che, se  $h \in H$  è rappresentato da un elemento  $g \in G$ , allora per ogni  $k \in K$  si ha

$$\begin{aligned} \alpha(h \cdot [k]) - h \cdot \alpha([k]) &= \alpha([gkg^{-1}]) - [g(k - 1)] = [gkg^{-1} - 1 - g(k - 1)] \\ &= g((k - 1)(1 - g))g^{-1} \in I(K)I(G) . \end{aligned}$$

Dalle definizioni discende immediatamente che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A_0(G, K) & \xrightarrow{\alpha} & A(G, K) \\ \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta \\ A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) & \longrightarrow & A(\widetilde{M} \rightarrow M) . \end{array}$$

**Corollario 3.4.** *La mappa  $\alpha$  è iniettiva.*

*Dimostrazione.* La tesi discende immediatamente dal fatto che  $\theta_0$  è un isomorfismo e la mappa  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  è iniettiva.  $\square$

**3.3. L'analogo algebrico della successione di Crowell.** Cerchiamo ora di costruire l'analogo algebrico della successione di Crowell descritta nella sottosezione 1.2.

L'applicazione  $\psi: G \rightarrow H$  induce un'applicazione  $\overline{\psi}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[H]$ , che si restringe ovviamente ad un'applicazione  $I(G) \rightarrow I(H)$ , che è peraltro surgettiva. Poiché  $I(K)I(G) \subseteq I(K) = \ker \overline{\psi}$ , la restrizione di  $\overline{\psi}$  passa al quoziente definendo un'applicazione

$$\beta: A(G, K) \rightarrow I(H) ,$$

anch'essa surgettiva. La seguente proposizione fornisce la successione esatta che stiamo cercando. Confrontando questa successione con la successione di Crowell topologica saremo poi in grado di dimostrare che  $A(G, K)$  è effettivamente isomorfo a  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ .

**Proposizione 3.5.** *La successione*

$$0 \longrightarrow A_0(G, K) \xrightarrow{\alpha} A(G, K) \xrightarrow{\beta} I(H) \longrightarrow 0$$

*è esatta.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che  $\alpha$  è iniettiva e  $\beta$  è surgettiva, per cui dobbiamo verificare che  $\text{Im } \alpha = \ker \beta$ . Ovviamente si ha

$$\beta(\alpha([k])) = \beta([k - 1]) = \psi(k) - 1 = 0 \quad \text{per ogni } k \in K$$

per cui  $\text{Im } \alpha \subseteq \ker \beta$ .

Sia ora  $c = [\sum_{j=1}^n a_j g_j] \in \ker \beta$ . Siano  $h_1, \dots, h_k$  le immagini dei  $g_i$  in  $H$ , con  $h_i \neq h_j$  se  $i \neq j$ , e per ogni  $i = 1, \dots, k$  sia

$$I_i = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \psi(g_j) = h_i\} .$$

Si ha allora

$$0 = \beta(c) = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j \in I_i} a_j \right) h_i ,$$

per cui

$$\sum_{j \in I_i} a_j = 0$$

per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Possiamo allora supporre senza perdita di generalità che esista un fissato  $h_0 \in H$  tale che  $\psi(g_j) = h_0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Scegliamo elemento  $\bar{g} \in G$  tale che  $\psi(\bar{g}) = h_0$ , e poniamo  $k_j = g_j \bar{g}^{-1} \in K$  per ogni  $j$ . Avremo allora

$$\sum_{j=1}^n a_j g_j = \sum_{j=1}^n a_j (g_j - \bar{g}) = \left( \sum_{j=1}^n a_j (k_j - 1) \right) \bar{g}$$

(dove nella prima uguaglianza si è usato che  $\sum_{j=1}^n a_j = 0$ ). Se ne deduce che

$$\begin{aligned} c - \alpha(k_1^{a_1} \dots k_n^{a_n}) &= \left[ \left( \sum_{j=1}^n a_j (k_j - 1) \right) \bar{g} - \left( \sum_{j=1}^n a_j (k_j - 1) \right) \right] \\ &= \left[ \left( \sum_{j=1}^n a_j (k_j - 1) \right) (\bar{g} - 1) \right] = 0 \end{aligned}$$

in quanto il termine entro parentesi quadre appartiene a  $I(K)I(G)$ . Abbiamo così dimostrato che  $c$  appartiene all'immagine di  $\alpha$ , da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 3.6.** *Il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} A(G, K) & \xrightarrow{\beta} & I(H) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \text{Id} \\ A(\widetilde{M} \rightarrow M) & \xrightarrow{\partial} & I(H) \end{array}$$

è commutativo.

*Dimostrazione.* Consideriamo un elemento  $c$  di  $A(G, K)$  rappresentato dalla somma  $\sum_{i=1}^n a_i g_i$ , con  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ . Allora

$$\partial\theta(c) = \sum_{i=1}^n a_i (\tilde{g}_i(1) - \tilde{g}_i(0)) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{g}_i(1) = \sum_{i=1}^n a_i \psi(g_i)(\tilde{x}_0),$$

da cui la tesi.  $\square$

Concludiamo la sezione con il seguente:

**Teorema 3.7.** *La mappa  $\theta: A(G, K) \rightarrow A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  è un isomorfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli.*

*Dimostrazione.* Quanto dimostrato finora mostra che le successioni di Crowell topologica e algebrica sono messe in relazione dal seguente diagramma

commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_0(G, K) & \xrightarrow{\alpha} & A(G, K) & \xrightarrow{\beta} & I(H) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta & & \downarrow \text{Id} \\
 0 & \longrightarrow & A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) & \longrightarrow & A(\widetilde{M} \rightarrow M) & \longrightarrow & I(H) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Poiché  $\theta_0$  e l'identità di  $I(H)$  sono isomorfismi, la tesi discende dal lemma dei 5.  $\square$

Abbiamo così dimostrato che il modulo  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  dipende solo dalla coppia  $(G, K)$ , e ne abbiamo dato una costruzione algebrica esplicita. Nella prossima sezione ci occuperemo di sfruttare i risultati dimostrati finora per descrivere come sia possibile ottenere una presentazione di  $A(G, K)$  a partire da una presentazione di  $G$ .

#### 4. IL CALCOLO DI FOX

Per semplicità, denotiamo con  $F_n$  il gruppo libero  $F(s_1, \dots, s_n)$ . Una *derivata di Fox* sull'anello gruppo  $\mathbb{Z}[F_n]$  è un'applicazione  $\mathbb{Z}$ -lineare

$$D: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n]$$

tale che

$$(3) \quad D(w_1 w_2) = D(w_1) + w_1 \cdot D(w_2) \quad w_1, w_2 \in G .$$

Da questa condizione si deducono immediatamente le relazioni  $D(1) = 0$  e  $D(w^{-1}) = -w^{-1}D(w)$  per ogni  $w \in G$ . Inoltre, è facile verificare che la condizione (3) è in effetti equivalente alla condizione

$$D(c_1 c_2) = \varepsilon(c_2) \cdot D(c_1) + c_1 \cdot D(c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{Z}[F_n] ,$$

dove  $\varepsilon: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}$  è il morfismo di augmentazione.

**Lemma 4.1.** *Per ogni  $i = 1, \dots, n$  si fissi un elemento  $c_i \in \mathbb{Z}[F_n]$ . Allora esiste un'unica derivata  $D: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n]$  tale che*

$$D(s_i) = c_i .$$

*Dimostrazione.* L'unicità è ovvia. Per quanto riguarda l'esistenza, basta definire  $D$  su  $F_n$  in modo che valga la condizione (3), ed estendere per  $\mathbb{Z}$ -linearità. Definiamo  $D$  per induzione sulla lunghezza del rappresentante ridotto. Se  $w = \prod_{i=1}^l s_{j_i}^{\epsilon_i}$  è una parola ridotta, poniamo

$$D(w) = D(s_{j_1}^{\epsilon_1}) + s_{j_1}^{\epsilon_1} D(s_{j_2}^{\epsilon_2}) + \dots + s_{j_1}^{\epsilon_1} \cdots s_{j_{l-1}}^{\epsilon_{l-1}} D(s_{j_l}^{\epsilon_l}) ,$$

dove  $D(s_i) = c_i$  e  $D(s_i^{-1}) = -s_i^{-1}D(s_i) = -s_i^{-1}c_i$ . L'unica cosa da dimostrare è che l'applicazione  $D$  così descritta rispetta la regola (3) che definisce la nozione di derivata, ovvero che  $D(w_1 w_2) = D(w_1) + w_1 \cdot D(w_2)$  per ogni  $w_1, w_2 \in F_n$ . Se la giustapposizione di  $g_1$  e  $g_2$  definisce una parola ridotta, la tesi è ovvia. Altrimenti, se il prodotto  $g_1 g_2$  presenta semplificazioni la tesi è una facile conseguenza della relazione esistente tra  $D(s_i)$  e  $D(s_i^{-1})$ .  $\square$

Definiamo ora la derivata parziale rispetto a  $s_i$ , che denoteremo d'ora in poi con  $D_i$ . Essa è l'unica derivata su  $\mathbb{Z}[F_n]$  tale che

$$D_i(s_j) = \delta_{ij} .$$

**Lemma 4.2** (Relazione fondamentale). *Per ogni elemento  $c \in \mathbb{Z}[F_n]$  si ha*

$$c - \varepsilon(c) = \sum_{i=1}^n D_i(c)(s_i - 1) .$$

*Dimostrazione.* È immediato verificare che la mappa  $\Delta: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n]$  definita da  $\Delta(c) = c - \varepsilon(c)$  è una derivazione. Consideriamo ora la derivazione  $\Delta'(c) = \sum_{i=1}^n D_i(c)(s_i - 1)$ . È immediato verificare che  $\Delta$  e  $\Delta'$  coincidono su tutti gli  $s_i$ , e pertanto coincidono su tutto  $\mathbb{Z}[F_n]$ , da cui la tesi.  $\square$

#### 4.1. Da una presentazione di $G$ ad una presentazione di $A(G, K)$ .

Torniamo ora al nostro contesto abituale, ovvero sia  $\psi: G \rightarrow H$  un morfismo di gruppi, dove  $H$  è abeliano e  $K = \ker \psi$ . Supponiamo di avere una presentazione

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

di  $G$ , e sia  $\varphi: F_n \rightarrow G$  l'epimorfismo associato alla presentazione. Vogliamo dedurre da questa presentazione una presentazione di  $A(G, K) \cong A(\widetilde{M} \rightarrow M)$ . Poiché gli elementi della forma  $\varphi(s_i) - 1$  generano  $I(G)$ , il modulo  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  è generato dagli elementi della forma

$$\theta'(\varphi(s_i) - 1) = \widetilde{\varphi(s_i)} - \widetilde{1} = \widetilde{\varphi(s_i)} .$$

Inoltre, è chiaro che si deve avere  $\widetilde{\varphi(r_j)} = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ . Usando induttivamente la regola (1) è poi facile esprimere  $\widetilde{\varphi(r_j)}$  nei termini dei  $\widetilde{\varphi(s_i)}$ . Si ottiene

$$\widetilde{\varphi(r_j)} = \sum_{i=1}^n \overline{\psi}(\overline{\varphi(D_i(r_j))}) \widetilde{\varphi(s_i)}, \quad j = 1, \dots, k .$$

È ragionevole supporre che queste siano le uniche relazioni che intercorrono tra i generatori  $\widetilde{\varphi(s_i)}$ , e questa sezione è interamente dedicata alla dimostrazione che le cose stanno proprio così. Più precisamente, dimostreremo il seguente

**Teorema 4.3.** *Gli  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli*

$$A(G, K) \cong A(\widetilde{M} \rightarrow M)$$

*ammettono una presentazione data dai generatori  $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n$  e dalle relazioni*

$$\sum_{i=1}^n \overline{\psi}(\overline{\varphi(D_i(r_j))}) \hat{s}_i = 0, \quad j = 1, \dots, k .$$

*Pertanto una matrice di presentazione per  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  è data da  $B$ , dove*

$$B_{ij} = \overline{\psi}(\overline{\varphi(D_i(r_j))}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k .$$

Indichiamo con  $\bar{\varphi}: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  la mappa indotta da  $\varphi$  sugli anelli gruppo. Per il Lemma 2.1, si ha

$$\ker \bar{\varphi} = I(\ker \varphi) = (r_1 - 1, \dots, r_k - 1) .$$

D'ora in poi indichiamo con  $R = \ker \varphi \subseteq F_n$  il sottogruppo “delle relazioni”. Inoltre, sia  $\bar{K} = \varphi^{-1}(K) = \ker \psi \circ \varphi$ . Poniamo

$$A(F_n, G, K) = I(F_n) / (I(\bar{K})I(F_n) + I(R)) .$$

e dotiamo  $A(F_n, G, K)$  della struttura di  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo ponendo per ogni  $h \in H, c \in I(F_n)$ :

$$h \cdot [c] = [w \cdot c], \quad \psi(\varphi(w)) = h .$$

La verifica che questa sia una buona definizione è immediata.

**Lemma 4.4.** *La mappa  $\bar{\varphi}: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  induce l'isomorfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli*

$$A(F_n, G, K) \cong A(G, K) .$$

*Dimostrazione.* Poiché  $\ker \bar{\varphi} = I(R) \subseteq I(F_n)$ , la mappa  $\bar{\varphi}$  induce un isomorfismo  $I(F_n)/I(R) \cong I(G)$ . Inoltre, tramite  $\bar{\varphi}$  l'ideale  $I(\bar{K})I(F_n)$  si surietta su  $I(K)I(G)$ . Ne segue che  $\bar{\varphi}$  induce l'isomorfismo di gruppi abeliani descritto nell'enunciato. Che tale isomorfismo commuti con l'azione di  $H$  discende banalmente dalle definizioni.  $\square$

Ci siamo dunque ricondotti al problema di dare una presentazione di  $A(F_n, G, K)$  come  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo. Sia  $\mathbb{Z}[H]^n$  lo  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo libero sui generatori  $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n$ , e consideriamo lo  $\mathbb{Z}[H]$ -sottomodulo  $M$  generato da

$$\sum_{i=1}^n \bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(r_j))) \hat{s}_i, \quad j = 1, \dots, k .$$

Il seguente risultato è equivalente al Teorema 4.3, e conclude la sezione.

**Teorema 4.5.** *Si ha un isomorfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli*

$$A(F_n, G, K) \cong \mathbb{Z}[H]^n / M .$$

*Dimostrazione.* Definiamo una funzione  $\Omega: I(F_n) \rightarrow \mathbb{Z}[H]^n$  definita da

$$\Omega(c) = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(c))) \cdot \hat{s}_i .$$

Ovviamente,  $\Omega$  è un morfismo di gruppi abeliani. Mostriamo innanzi tutto che  $\Omega$  passa al quoziente definendo un morfismo di gruppi abeliani tra  $A(F_n, G, K)$  e  $\mathbb{Z}[H]^n/M$ , ovvero che  $\Omega(I(\bar{K})I(F_n) + I(R)) \subseteq M$ .

Verifichiamo innanzi tutto che  $\Omega$  si annulla su  $I(\bar{K})I(F_n)$ . Se  $z \in I(\bar{K})$  e  $w \in I(F_n)$ , allora

$$\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(zw))) = \bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(z)))\varepsilon(w) + \bar{\psi}(\bar{\varphi}(z))\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(w))) = 0 ,$$

in quanto  $\varepsilon(w) = 0$  e  $\bar{\psi}(\bar{\varphi}(z)) = 0$ . Se ne deduce che  $\Omega(zw) = 0$ . Poiché  $\Omega$  è un morfismo di gruppi, ciò implica che  $\Omega$  si annulla su  $I(\bar{K})I(F_n)$ .

Consideriamo ora un elemento  $c \in I(F_n)$  della forma  $c = a(r_j - 1)b$ , dove  $a, b \in \mathbb{Z}[G]$  e  $r_j$  è una delle relazioni della presentazione di  $G$ . Sfruttando il fatto che  $\varepsilon(r_j - 1) = 0$  e che  $D_i(r_j - 1) = D_i(r_j)$  si ottiene

$$D_i(a(r_j - 1)b) = \varepsilon(b)aD_i(r_j) + a(r_j - 1)D_i(b) ,$$

da cui

$$\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(a(r_j - 1)b))) = \varepsilon(b)\bar{\psi}(\bar{\varphi}(a))\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(r_j)))$$

e

$$\Omega(c) = \varepsilon(b)\bar{\psi}(\bar{\varphi}(a)) \left( \sum_{i=1}^n \bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(r_j)))\hat{s}_i \right) \in M .$$

Abbiamo dunque dimostrato che  $\Omega$  passa al quoziente definendo un morfismo di gruppi abeliani

$$\bar{\Omega}: I(F_n, G, K) \rightarrow \mathbb{Z}[H]^n/M .$$

Mostriamo che  $\bar{\Omega}$  è in effetti un morfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli. Basta verificare che per ogni  $w \in F_n$ ,  $c \in I(F_n)$  si ha

$$\bar{\Omega}([w \cdot c]) = \psi(\varphi(w))[\Omega(c)] .$$

Ma ciò discende dal fatto che  $\varepsilon(c) = 0$ , per cui

$$\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(w \cdot c))) = \psi(\varphi(w))\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(c)))$$

per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Avendo mostrato che  $\bar{\Omega}$  è un morfismo di  $\mathbb{Z}[H]$ -moduli, la surgettività di  $\bar{\Omega}$  discende ora dal fatto che l'immagine di  $\bar{\Omega}$  contiene un insieme di generatori, in quanto  $\Omega(s_i - 1) = \hat{s}_i$ .

Mostriamo infine che  $\bar{\Omega}$  è iniettiva. Sia  $c = \sum_{i=1}^n c_i(s_i - 1)$  e supponiamo che  $\Omega(c) \in M$ , ovvero che

$$\Omega(c) = \sum_{j=1}^k a_j \left( \sum_{i=1}^n \bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(r_j)))\hat{s}_i \right)$$

per qualche  $a_j \in \mathbb{Z}[H]$ . Se  $w_j \in \mathbb{Z}[F_n]$  si proietta su  $a_j$ , allora

$$c' = \sum_{j=1}^k w_j \left( \sum_{i=1}^n D_i(r_j)(s_i - 1) \right) = \sum_{j=1}^k w_j(r_j - 1) \in I(R) ,$$

e chiaramente  $\Omega(c - c') = 0$ . Possiamo dunque supporre che  $\Omega(c) = 0$ , ovvero che  $\bar{\psi}(\bar{\varphi}(D_i(c))) = 0$  per ogni  $i$ . Ciò significa precisamente che  $D_i(c) \in I(\bar{K})$  per ogni  $i$ , per cui

$$c = \sum_{i=1}^n D_i(c)(s_i - 1) \in I(\bar{K})I(F_n) .$$

□

## 5. DUE ESEMPI

In questa sezione applichiamo il metodo appena descritto al calcolo degli ideali di Alexander di due link.

**5.1. Il link di Whitehead.** Calcoliamo gli ideali di Alexander del link di Whitehead descritto in Figura 1. Dal diagramma è possibile dedurre una presentazione di Wirtinger per  $G$  con generatori  $x_1, \dots, x_6$  e relazioni

$$x_1x_4x_1^{-1} = x_5, \quad x_1x_3x_1^{-1} = x_6, \quad x_4x_1x_4^{-1} = x_2, \quad x_3x_1x_3^{-1} = x_2, \quad x_4x_5x_4^{-1} = x_6$$

(una delle relazioni è stata omessa, in quanto sappiamo che una qualsiasi relazione in una presentazione di Wirtinger è conseguenza delle altre). Eliminiamo  $x_2$  uguagliando i membri sinistri della terza e quarta relazione, e  $x_6$  uguagliando i membri sinistri della seconda e dell'ultima relazione; quindi, usiamo la prima equazione per eliminare  $x_5$ . A questo punto abbiamo che  $G$  ammette la presentazione  $\langle x_1, x_3, x_4 \mid r_1, r_2 \rangle$ , con

$$r_1 = x_4x_1x_4^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}, \quad r_2 = x_1x_3x_1^{-1}x_4x_1x_4^{-1}x_1^{-1}x_4^{-1}.$$

Sia ora  $H = \langle t_1, t_2 \rangle = G/G'$ , e supponiamo che  $t_1$  (risp.  $t_2$ ) sia l'immagine in  $G$  di  $x_1$  (risp. di  $x_3$  e di  $x_4$ ). Si ha allora

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{\psi}(\bar{\phi}(D_i(r_1))) &= (t_1 - 1)\hat{x}_3 + (1 - t_1)\hat{x}_4, \\ \sum_i \bar{\psi}(\bar{\phi}(D_i(r_2))) &= (t_2 - 1)^2\hat{x}_1 + t_1\hat{x}_3 + (t_2 - t_1t_2 - 1)\hat{x}_4. \end{aligned}$$

Dunque una matrice di presentazione per  $A(L)$  è data dalla trasposta di

$$\begin{pmatrix} 0 & t_1 - 1 & 1 - t_1 \\ (t_2 - 1)^2 & t_1 & t_2 - t_1t_2 - 1 \end{pmatrix}$$

È a questo punto immediato verificare che si ha

$$\begin{aligned} E_0(L) &= 0, & E_1(L) &= ((t_1 - 1)^2(t_2 - 1), (t_1 - 1)(t_2 - 1)^2), \\ E_i(L) &= \Lambda_2 \text{ per ogni } i \geq 2. \end{aligned}$$

**5.2. Un homology boundary link.** La Figura 2 rappresenta un diagramma un homology boundary link  $L$ , un cui cut system è descritto in Figura 3. Calcoliamo gli ideali di Alexander di  $L$ . Consideriamo perciò la presentazione di Wirtinger associata al diagramma, che avrà generatori  $x_1, \dots, x_{12}$ . Cominciamo a considerare gli incroci più "semplici", ovvero quelli che coinvolgono gli archi 4, 9 e 12. Gli incroci che coinvolgono l'arco 4 danno le relazioni  $x_1x_5x_1^{-1} = x_4$ ,  $x_7x_3x_7^{-1} = x_4$ . Come sappiamo, la procedura di Wirtinger ci permette di ignorare una tra le relazioni definite dagli incroci. Ignoriamo la prima tra le due relazioni appena scritte: a questo punto  $x_4$  compare solo nell'altra (e in nessuna tra tutte le altre relazioni), per cui è possibile ignorare anche la seconda. Inoltre, i 4 incroci che coinvolgono gli archi 12 e 9 permettono di eliminare i generatori corrispondenti e danno le relazioni:

$$(4) \quad x_1x_{11}x_1^{-1} = x_7x_{11}x_7^{-1}, \quad x_6x_8x_6^{-1} = x_2x_{10}x_2^{-1}.$$

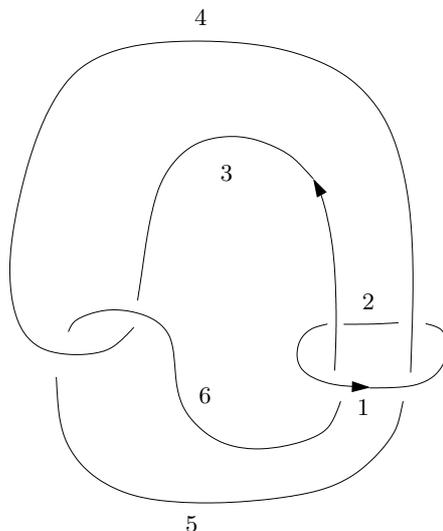


FIGURA 1. Il link di Whitehead: all'arco  $i$  corrisponde il generatore  $x_i$  della presentazione di Wirtinger.

Scriviamo ora le relazioni rimanenti:

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{11}x_8x_{11}^{-1} = x_7, & \quad x_{11}x_{10}x_{11}^{-1} = x_1, & \quad x_{10}x_3x_{10}^{-1} = x_2, \\ x_3x_6x_3^{-1} = x_7, & \quad x_3x_2x_3^{-1} = x_1, & \quad x_{10}x_5x_{10}^{-1} = x_6 \end{aligned}$$

La variabile  $x_5$  compare solo nell'ultima relazione, che permettere di esprimere  $x_5$  come prodotto di altri generatori. Si può dunque eliminare il generatore  $x_5$  insieme all'ultima relazione in (5). Usiamo poi le prime tre relazioni in (5) per sostituire  $x_1, x_2, x_7$  nelle altre relazioni in (4) e (5).

Così facendo, siamo giunti a una presentazione della forma

$$\langle x_3, x_6, x_8, x_{10}, x_{11} \mid r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle$$

dove

$$\begin{aligned} r_1 &= x_{10}x_{11}x_{10}^{-1}x_8x_{11}^{-1}x_8^{-1}, & r_2 &= x_3x_{10}x_3x_{10}^{-1}x_3^{-1}x_{11}x_{10}^{-1}x_{11}^{-1}, \\ r_3 &= x_3x_6x_3^{-1}x_{11}x_8^{-1}x_{11}^{-1}, & r_4 &= x_6x_8x_6^{-1}x_{10}x_3x_{10}^{-1}x_3^{-1}x_{10}^{-1} \end{aligned}$$

Sia ora  $t_1$  (risp.  $t_2$ ) l'immagine di  $x_2, x_3, x_5, x_{10}$  (risp. di  $x_{11}$ ) in  $G/G'$ . È facile verificare che la matrice di presentazione di  $A(L)$  dedotta dalla presentazione di  $G$  appena scritta è la trasposta di:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2 - 1 & 1 - t_2 & 0 \\ t_1^2 - t_1 + 1 & 0 & 0 & -t_1^2 + t_1 - t_2 & t_1 - 1 \\ 1 - t_1 & t_1 & -t_2 & 0 & t_1 - 1 \\ t_1^2 - t_1 & 1 - t_1 & t_1 & -t_1^2 + t_1 - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un semplice calcolo (dopo opportune mosse di Gauss!) mostra ora che

$$E_1(L) = 0, \quad E_2(L) = (t_1^2 - t_1 + 1, t_2 - 1), \quad E_i(L) = \Lambda_2 \text{ se } i \geq 3.$$

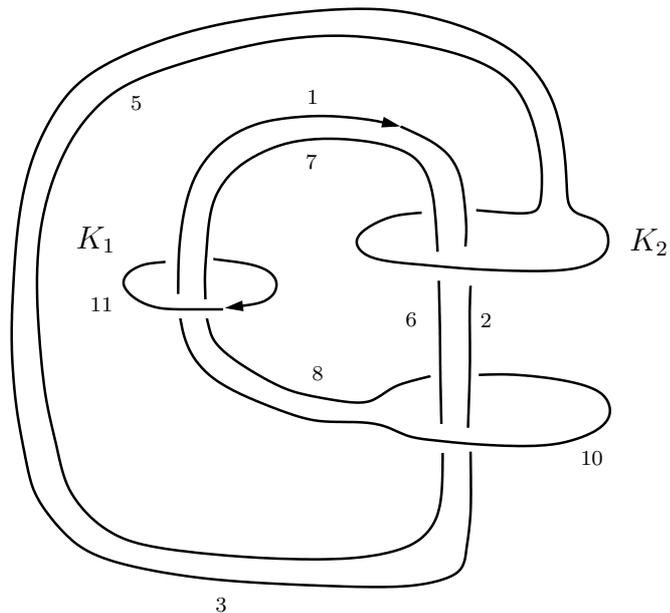


FIGURA 2. All'arco  $i$  corrisponde il generatore  $x_i$  della presentazione di Wirtinger. Gli archi 4, 9 e 12 non sono raffigurati.

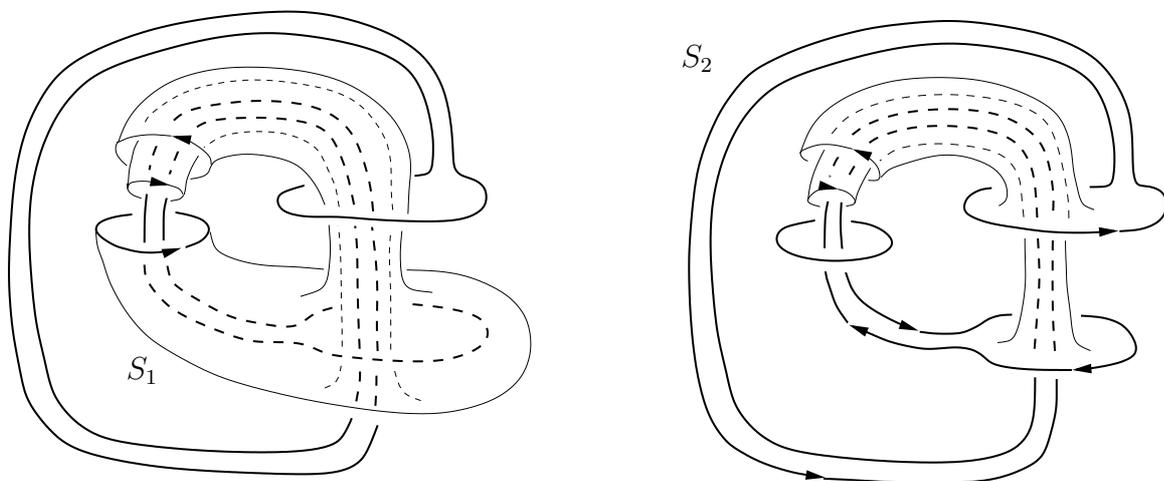


FIGURA 3. Il cut system per l'homology boundary link descritto nella figura precedente.

## 6. IL CASO DEI NODI

Torniamo alle notazioni in uso nelle sezioni precedenti, per cui sia  $M$  uno spazio topologico congruppo fondamentale  $G$ , e sia  $K$  un sottogruppo di  $G$

con  $H = G/K$  abeliano. Sia inoltre  $\widetilde{M}$  il rivestimento di  $M$  associato a  $K$ . Riscriviamo la successione esatta di Crowell

$$0 \longrightarrow A_0(\widetilde{M} \rightarrow M) \longrightarrow A_1(\widetilde{M} \rightarrow M) \longrightarrow I(H) \longrightarrow 0$$

**Corollario 6.1.** *Supponiamo che si abbia  $H \cong \mathbb{Z}$  (ciò accade per esempio nel caso in cui si abbia  $a$  che fare con il rivestimento ciclico infinito del complementare di un nodo). Allora*

$$A(M) \cong A_0(M) \oplus \mathbb{Z}[H] .$$

Di conseguenza si ha

$$E_{r+1}(A(M)) = E_r(A_0(M)) \quad r \in \mathbb{Z}$$

(dove poniamo  $E_r(N) = 0$  per ogni modulo  $N$  e ogni  $r < 0$ ).

*Dimostrazione.* Se  $H \cong \mathbb{Z}$ , il Lemma 2.1 assicura che  $I(H)$  è un ideale principale non banale di  $\mathbb{Z}[H]$ . Poiché  $\mathbb{Z}[H]$  è un dominio,  $I(H)$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}[H]$  (ed è dunque libero) come  $\mathbb{Z}[H]$ -modulo, per cui la successione di Crowell spezza, e ciò implica la prima asserzione.

Di conseguenza, se  $B$  è una matrice di presentazione per  $A_0(\widetilde{M} \rightarrow M)$ , allora una matrice di presentazione per  $A(\widetilde{M} \rightarrow M)$  si ottiene aggiungendo a  $B$  una riga nulla. Se ne deduce facilmente la tesi.  $\square$

## 7. IL CASO DEI NODI

Sia ora  $K$  un nodo. Ricordiamo che  $L^i$ -esimo ideale (risp. polinomio) di Alexander di  $K$  è l'ideale (risp. il polinomio)  $E_i(K) = E_i(A(C(K)))$  (risp.  $\Delta_i(A(C(K)))$ ), dove  $A(C(K))$  è il modulo associato al rivestimento universale ciclico  $\widetilde{C(K)}_\infty$ .

Come immediata conseguenza del Corollario 6.1 si ha che

$$\Delta(K) = \Delta_1(K) .$$

In realtà è possibile essere ancora più precisi:

**Proposizione 7.1.** *Si consideri una presentazione di Wirtinger per  $G = \pi_1(K)$  associata ad un diagramma di  $K$ , e sia  $A$  la matrice di presentazione per  $A(K)$  ad essa associata (pertanto, se il diagramma di  $K$  ha  $n$  incroci, allora  $A$  è quadrata di ordine  $n$ ). Rimuovendo una qualsiasi riga ed una qualsiasi colonna da  $A$  si ottiene una matrice di presentazione per  $A_0(K)$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che una qualsiasi relazione di una presentazione di Wirtinger è ridondante, per cui rimuovendo da  $A$  una colonna si ottiene comunque una matrice  $A'$  di presentazione per  $A(K)$ . Ricordiamo che  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$  sono i generatori di  $A(K)$  associati ai generatori  $s_1, \dots, s_n$  della presentazione di  $G$ . È immediato verificare che rimuovendo da  $A'$  la  $i$ -esima riga si ottiene una matrice  $A''$  che presenta il quoziente  $A(K)/\langle \tilde{s}_i \rangle$ , dove  $\langle \tilde{s}_i \rangle$  è lo  $\mathbb{Z}[H]$ -sottomodulo di  $A(K)$  generato da  $\tilde{s}_i$ . Per concludere è perciò sufficiente dimostrare che  $A_0(L) \cong A(K)/\langle \tilde{s}_i \rangle$ , ovvero che è possibile scegliere

una sezione  $\sigma: I(H) \rightarrow A(K)$  tale che  $\sigma(t-1) = \tilde{s}_i$ . Ma ciò è ovvio: poiché la classe di omologia di  $s_i$  è il meridiano di  $K$ , l'automorfismo associato a  $s_i$  è proprio  $t$ , per cui

$$\partial \tilde{s}_i = \tilde{s}_i(1) - \tilde{s}_i(0) = (t-1)\tilde{x}_0 .$$

Tramite gli opportuni isomorfismi, ciò significa proprio che la mappa  $A(K) \rightarrow I(H)$  che fa parte della successione di Crowell porta  $\tilde{s}_i$  in  $(t-1)$ , da cui la tesi.  $\square$

Abbiamo così dato una nuova dimostrazione del fatto che il primo ideale di Alexander di un nodo è principale:

**Corollario 7.2.** *Per ogni nodo  $K$  l'ideale  $E_1(K)$  è principale.*

Vediamo anche un'altra interessante conseguenza di quanto visto:

**Teorema 7.3.** *Sia  $K$  un nodo, e sia  $p$  un primo. Allora  $K$  ammette una  $p$ -colorazione non costante se e solo se*

$$|\Delta(K)(-1)| \quad \text{divide } p .$$

*Dimostrazione.* Si fissi un diagramma di  $K$ , si consideri una presentazione di Wirtinger associata

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$$

per  $G$  e si consideri la corrispondente presentazione di  $A(K)$ . Fissiamo la relazione

$$r = x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$$

corrispondente ad un incrocio del diagramma di  $K$ , e consideriamo le sue derivate di Fox. Ricordiamo che ogni  $x_i$  rappresenta un meridiano, per cui  $\overline{\psi}(\overline{\phi}(x_i)) = t \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  per ogni  $i$ . Si ha poi

$$D_i(r) = 1 - x_i x_j x_i^{-1}, \quad D_j(r) = x_1, \quad D_k(r) = -x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1},$$

per cui la relazione in  $A(K)$  corrispondente all'incrocio considerato diviene

$$(1-t)\tilde{s}_i + t\tilde{w}_j - \tilde{s}_k = 0 .$$

Sia ora  $A(t)$  la matrice associata alla presentazione di  $A(K)$  appena ottenuta. Si calcoli  $A(-1)$  e si riducano i coefficienti di tale matrice nel campo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . È allora chiaro che la matrice ottenuta rappresenta la matrice di un sistema lineare (sul campo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ) di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, in cui l'equazione corrispondente alla relazione  $r$  descritta sopra diviene

$$2x_i - x_j - x_k = 0 .$$

Se  $x_1, \dots, x_n$  sono incognite che rappresentano i possibili colori di una colorazione del diagramma di  $K$ , l'equazione appena scritta rappresenta esattamente la condizione che tali colori devono soddisfare per dare una colorazione ammissibile. Dunque il diagramma ammette una colorazione non costante se e solo se il kernel della matrice  $A(-1)$  ha dimensione almeno 2, ovvero se e solo se tutti i minori di ordine  $(n-1)$  di  $A(-1)$  sono nulli in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Per definizione, ciò equivale al fatto che  $\Delta(K)(-1)$  sia divisibile per  $p$ .  $\square$

## 8. ALCUNE PROPRIETÀ DEGLI IDEALI DI ALEXANDER DEI LINK

Interessiamoci ora del caso generale dei link. Per tutta la sezione, fissiamo un link  $L$  avente  $m$  componenti. Indichiamo anche con  $\Lambda_m$  l'anello  $\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t^{\pm m}]$  e con  $I_m \subseteq \Lambda_m$  l'ideale di augmentazione. Fissiamo anche una presentazione  $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$  di  $G = \pi_1(C(L))$ , e siano  $A_{ij} = \psi(\phi(D_i(r_j))) \in \Lambda_m$  i coefficienti della matrice di presentazione per  $A(L)$  associata.

**Proposizione 8.1.** *Si ha*

$$E_0(L) = 0 .$$

*Dimostrazione.* Tramite il metodo di Wirtinger, è possibile dare una presentazione di  $G$  tale che  $n - k = 1$  (ovvero, il numero delle relazioni è uguale al numero dei generatori meno uno). Per il Teorema 4.3, ne segue che  $A(L)$  ammette una matrice di presentazione con più righe che colonne, da cui la tesi.  $\square$

La proposizione seguente generalizza il fatto, che già conosciamo, che se  $m = 1$ , ovvero se  $L$  è un nodo, allora  $\Delta_1(K)(1) = \pm 1$ .

**Proposizione 8.2.** *Si ha  $\Delta_m(L)(1, \dots, 1) = 1$  (e in particolare  $E_m(L) \neq 0$ ).*

*Dimostrazione.* Sia  $\pi_m: \Lambda_m \rightarrow \mathbb{Z}$  la mappa che associa ad ogni polinomio la sua valutazione in  $(1, \dots, 1)$ . Osserviamo che l'elemento  $A_{ij}$  appartiene a  $\Lambda_m$ , e per definizione di derivata di Fox si ha che  $\pi_m(A_{ij})$  è uguale alla somma algebrica degli esponenti di  $s_i$  nella relazione  $r_j$ . Di conseguenza se  $B$  è la matrice data da  $B_{ij} = \pi_m(A_{ij})$ , allora  $B$  è una matrice di presentazione per  $G/G' \cong \mathbb{Z}^m$ . Da ciò si deduce immediatamente che l' $m$ -esimo ideale elementare  $E_m(B) \subseteq \mathbb{Z}$  di  $B$  è uguale a  $\mathbb{Z}$  stesso. Notiamo inoltre che, poiché  $\pi_m$  è surgettivo, si ha  $\mathbb{Z} = E_m(B) = \pi_m(E_m(L))$ , per cui esiste  $p(t) \in E_m(L)$  tale che  $\pi_m(p(t)) = 1$ . Poiché  $\Delta_m(t)$  divide  $p(t)$  si ha che  $\pi_m(\Delta(t))$  divide 1 in  $\mathbb{Z}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Proposizione 8.3.** *Sia  $m \geq 2$ . Allora*

$$E_1(L) = I_m \cdot (\Delta_1(L)) .$$

*In particolare, se non è nullo, l'ideale  $E_1(L)$  non è principale.*

*Dimostrazione.* A partire da una presentazione di Wirtinger (e ignorando come al solito una qualsiasi relazione) e applicando il calcolo di Fox è possibile dare una matrice di presentazione  $B$  di  $A(L)$  con  $n$  righe (corrispondenti ai generatori  $\hat{s}_i$ ) e  $n - 1$  colonne. Ricordiamo che, se  $r_1, \dots, r_{n-1}$  sono le relazioni che definiscono  $\pi_1(C(L))$  come quoziente del gruppo libero  $F_n$  sui generatori  $s_1, \dots, s_n$ , allora

$$B_{ij} = \overline{\psi}(\overline{\varphi}(D_i(r_j))) .$$

Sia ora  $k: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  l'applicazione che associa ad ogni indice  $i$  la componente  $k(i)$  del nodo sulla quale si trova l' $i$ -esimo arco del diagramma

sfruttato per la presentazione di Wirtinger del link. Si ha allora  $\psi(\varphi(s_i)) = t_{k(i)}$ . Inoltre, la relazione fondamentale del calcolo di Fox assicura che

$$r_j - 1 = \sum_{i=1}^n D_i(r_j)(s_i - 1) .$$

Applicando l'omomorfismo di anelli  $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}$  a entrambi i membri di questa uguaglianza si ottiene

$$(6) \quad 0 = \sum_{i=1}^n B_{ij} \cdot (t_{k(i)} - 1) .$$

Sia ora  $\tilde{B}$  la matrice ottenuta da  $B$  moltiplicando la  $i$ -esima riga per  $t_{k(i)} - 1$ , per tutti gli  $i$ . Inoltre, per ogni  $l = 1, \dots, n$  sia  $B_l$  (risp.  $\tilde{B}_l$ ) la matrice ottenuta togliendo da  $B$  (risp. da  $\tilde{B}$ ) la  $l$ -esima riga. Per definizione,  $E_1(L)$  è generato dai determinanti delle matrici  $B_l$ . Inoltre, si ha ovviamente

$$\det \tilde{B}_l = \det B_l \cdot \prod_{i \neq l} (t_{k(i)} - 1) ,$$

mentre dall'uguaglianza (6) si ottiene che per ogni  $l, l'$  si ha

$$\det(\tilde{B}_l) = \pm \det(\tilde{B}_{l'}) .$$

Dalle ultime due uguaglianze discende che

$$(7) \quad \det B_l \cdot \prod_{i \neq l} (t_{k(i)} - 1) = \det B_{l'} \cdot \prod_{i \neq l'} (t_{k(i)} - 1) .$$

Poiché  $m \geq 2$ , fissato comunque  $l$  esiste  $l'$  tale che  $k(l) \neq k(l')$ . Dal fatto che i  $t_j - 1$  sono a due a due primi tra loro, se ne deduce che  $\det B_l$  è diviso da  $t_{k(l)} - 1$  per ogni  $l$ . Inoltre, dall'uguaglianza (7) si deduce che

$$\Delta = \frac{\det B_l}{t_{k(l)} - 1}$$

è indipendente da  $l$ . Da ciò si deduce che  $E_1(L) = I_m \cdot (\Delta)$ , per cui, visto che il massimo comune divisore di tutti gli elementi di  $I_m$  è l'unità,  $\Delta = \Delta_1(L)$ .  $\square$

**8.1. Homology boundary links.** Supponiamo ora che  $L$  sia homology boundary, e concentriamoci sul caso in cui  $L$  abbia 2 componenti (il caso generale è del tutto analogo). Sia  $Y = S^1 \vee S^1$  il bouquet di due copie di  $S^1$  con vertice in  $y_0$ . Fissato un punto  $x_0 \in M = C(L)$ , abbiamo una mappa

$$f: (M, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

che induce un epimorfismo dei gruppi fondamentali  $f_*: G \rightarrow F_2$ . Inoltre, è ovvio come costruire una mappa di spazi puntati

$$g: (Y, y_0) \rightarrow (M, x_0)$$

in modo che si abbia

$$f_* \circ g_* = \text{Id}_{F_2} .$$

Più precisamente, è possibile scegliere  $g$  in modo che  $f \circ c$  sia omotopa all'identità come mappa della coppia  $(Y, y_0)$  (in realtà, è addirittura possibile costruire  $f$  e  $g$  in modo che  $f \circ g$  sia l'identità, ma ciò non è rilevante per i nostri scopi). La mappa  $f_*$  induce un epimorfismo  $\hat{f}: H = G/G' \rightarrow F_2/F_2'$ . Poiché  $F_2/F_2' \cong \mathbb{Z}^2 \cong H$ , l'omomorfismo  $\hat{f}$  è in effetti un isomorfismo, per cui d'ora in poi considereremo fissata l'identificazione di  $H$  con  $F_2/F_2'$  definita da  $\hat{f}$ . Sia  $p_Y: \tilde{Y}_\infty \rightarrow Y$  il rivestimento abeliano massimale di  $Y$ , sia  $\tilde{Y}_0 = p_Y^{-1}(y_0)$  e fissiamo un punto base  $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}_0$ . Per quanto detto, il modulo  $A(Y) = H_1(\tilde{Y}, \tilde{Y}_0)$  è naturalmente un  $\Lambda_2$ -modulo. Inoltre, poiché  $f_*(G') \subseteq F_2'$  e  $g_*(F_2') \subseteq G'$ , le mappe  $f$  e  $g$  si sollevano a mappe di coppia

$$\tilde{f}: (\tilde{M}_\infty, \tilde{M}_0) \rightarrow (\tilde{Y}_\infty, \tilde{Y}_0), \quad \tilde{g}: (\tilde{Y}_\infty, \tilde{Y}_0) \rightarrow (\tilde{M}_\infty, \tilde{M}_0) .$$

Tali mappe inducono morfismi

$$\varphi: A(M) \rightarrow A(Y), \quad \psi: A(Y) \rightarrow A(M) .$$

Tramite l'identificazione naturale  $G/G' \cong F_2/F_2'$  sopra descritta, tali mappe risultano essere morfismi di  $\Lambda_2$ -moduli. Inoltre, poiché  $f \circ g$  è omotopa all'identità di  $(Y, y_0)$ , la composizione  $\tilde{f} \circ \tilde{g}$  è omotopa all'identità di  $(\tilde{Y}, \tilde{Y}_0)$ , per cui

$$\varphi \circ \psi = \text{Id}_{A(Y)} .$$

Se ne deduce il seguente risultato, che fornisce un'importante ostruzione utile per mostrare che un link non è homology boundary.

**Teorema 8.4.** *Sia  $L$  un homology boundary link con 2 componenti. Allora*

$$E_0(L) = E_1(L) = 0 .$$

*Inoltre,*

$$E_2(L) = E_0(\ker \phi) .$$

*Dimostrazione.* Poiché  $F_2$  ammette la presentazione banale, per il Teorema 4.3 si ha  $A(Y) \cong \Lambda_2^2$ . Insieme al fatto che  $\psi: A(M) \rightarrow A(Y)$  ammette l'inversa destra  $\varphi: A(Y) \rightarrow A(M)$ , ciò implica che

$$A(M) \cong \ker \varphi \oplus \Lambda_2^2 .$$

Se ne deduce immediatamente la tesi. □

**Corollario 8.5.** *Il link di Whitehead, pur avendo componenti algebricamente snodate, non è homology boundary.*

Nella prossima sottosezione ci sarà utile dare una descrizione più dettagliata di  $\ker \varphi$ . Ricordiamo che, se  $L$  è un homology boundary link, allora  $M$  ammette un cut system  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ , ovvero un sistema di superfici connesse tali che  $M \setminus (S_1 \cup S_2)$  sia connesso. In tal caso è possibile costruire  $\tilde{M}_\infty$  in maniera esplicita, proprio come abbiamo fatto a lezione nel caso dei nodi: posto  $V = M \setminus (S_1 \cup S_2)$ , il rivestimento abeliano massimale  $\tilde{M}_\infty$  si ottiene

attaccando tra loro una famiglia di copie di  $V$  indicizzata da  $H = G/G'$ . Indichiamo con  $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \tilde{M}_\infty$  la preimmagine di  $S_1 \cup S_2$  in  $\tilde{M}_\infty$ . Nel seguito supporremo anche che la mappa  $f: M \rightarrow Y$  sia stata costruita proprio a partire dal cut system  $\mathcal{S}$ .

**Lemma 8.6.** *Si ha*

$$\ker \varphi \cong \text{Im} \left( i_*: H_1 \left( \tilde{M}_\infty \setminus \tilde{\mathcal{S}} \right) \rightarrow H_1(\tilde{M}_\infty) \right).$$

*Dimostrazione.* Le sequenze di Crowell per i moduli di Alexander  $A(M)$  e  $A(Y)$  danno luogo al seguente diagramma commutativo, in cui le righe sono esatte e l'ultima freccia verticale è un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(\tilde{M}_\infty) = G/[G, G] & \longrightarrow & A(M) & \longrightarrow & \Lambda_2 \\ & & \downarrow \tilde{f}_* & & \downarrow \varphi & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & H_1(\tilde{Y}_\infty) = F_2/[F_2, F_2] & \longrightarrow & A(Y) & \longrightarrow & \Lambda_2 \end{array}$$

Analizzando il diagramma si ottiene facilmente che  $\ker \varphi$  è isomorfo a  $\ker \tilde{f}_*$ .

Ora, l'inclusione

$$\text{Im} \left( i_*: H_1 \left( \tilde{M}_\infty \setminus \tilde{\mathcal{S}} \right) \rightarrow H_1(\tilde{M}_\infty) \right) \subseteq \ker \tilde{f}_*$$

è ovvia. Sia ora  $z$  un ciclo in  $Z_q(\tilde{M}_\infty)$  tale che  $\tilde{f}_*([z]) = 0$  in  $H_1(\tilde{Y}_\infty)$ . Possiamo supporre che  $z$  sia rappresentato da un loop in posizione generale rispetto a  $\tilde{\mathcal{S}}$ , in modo che sia ben definito il suo numero di intersezione algebrica con ogni componente di  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Inoltre, dal fatto che  $f: M \rightarrow Y$  è stata costruita a partire da  $\mathcal{S}$  è facile dedurre che, poiché  $\tilde{f}_*([z]) = 0$ , il numero di intersezione algebrica di  $[z]$  con ogni componente di  $\mathcal{S}$  è nullo. Da ciò segue che  $z$  è omologo a un ciclo il cui supporto non interseca  $\tilde{\mathcal{S}}$ , e ciò implica l'inclusione

$$\ker \tilde{f}_* \subseteq \text{Im} \left( i_*: H_1 \left( \tilde{M}_\infty \setminus \tilde{\mathcal{S}} \right) \rightarrow H_1(\tilde{M}_\infty) \right),$$

da cui la tesi.

Diamo tuttavia una dimostrazione più formale dell'uguaglianza

$$\ker \tilde{f}_* = \text{Im} \left( i_*: H_1 \left( \tilde{M}_\infty \setminus \tilde{\mathcal{S}} \right) \rightarrow H_1(\tilde{M}_\infty) \right),$$

che ci permetterà poi di dare una presentazione esplicita di  $\ker \varphi \cong \ker \tilde{f}_*$ . Fissata un'identificazione di  $H$  with  $\mathbb{Z}^2$ , poniamo

$$V' = \bigsqcup_{i+j \text{ pari}} V_{(i,j)} \subseteq \tilde{M}_\infty, \quad V'' = \bigsqcup_{i+j \text{ dispari}} V_{(i,j)} \subseteq \tilde{M}_\infty,$$

dove  $V_{(i,j)}$ ,  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  sono le copie di  $V$  che costituiscono  $\tilde{M}_\infty$ . Per costruzione  $V' \cap V'' = \tilde{\mathcal{S}}$ ,  $V' \cup V'' = \tilde{M}_\infty$ . Vi è anche un'ovvia equivalenza omotopica tra  $\tilde{M}_\infty \setminus \tilde{\mathcal{S}}$  e l'unione *disgiunta*  $V' \sqcup V''$ .

Il rivestimento  $\tilde{Y}_\infty$  ammette una decomposizione simile. Per naturalità della successione di Mayer-Vietoris abbiamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_1(V' \cap V'') & \xrightarrow{\theta} & H_1(\tilde{M}_\infty \setminus \tilde{S}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\tilde{M}_\infty) = [G, G] & \longrightarrow & H_0(\tilde{S}) \cong \Lambda_2^2, \\ & & \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* & & \downarrow \cong \\ & & 0 & \longrightarrow & H_1(\tilde{Y}_\infty) = F_2/[F_2, F_2] & \longrightarrow & \Lambda_2^2 \end{array}$$

in cui le righe sono esatte, e l'ultima freccia verticale è un isomorfismo. Analizzando il diagramma è ora facile concludere che  $i_*(H_1(\tilde{M}_\infty \setminus \tilde{S})) = \ker \tilde{f}_*$ .  $\square$

**Osservazione 8.7.** L'ultimo diagramma nella dimostrazione del Lemma 8.6 mostra che  $\ker \varphi$  è isomorfo al quoziente di  $H_1(\tilde{M}_\infty \setminus \tilde{S})$  per l'immagine di  $H_1(V' \cap V'')$  tramite la mappa  $\theta$ . Per definizione, se  $\tilde{S}$  è una componente di  $\tilde{S}$  che separa  $V_{(i', j')} \subseteq V'$  da  $V_{(i'', j'')} \subseteq V''$ , allora  $\theta$  porta ogni  $\alpha \in H_1(\tilde{S})$  nella differenza  $\theta'(\alpha) - \theta''(\alpha)$ , dove  $\theta'$  (resp.  $\theta''$ ) è indotta dall'inclusione di  $\tilde{S}$  in  $V'$  (resp. in  $V''$ ). Useremo questa osservazione nella Proposizione 8.8 per costruire una presentazione esplicita di  $\ker \varphi$ .

**8.2. Boundary links.** Supponiamo ora che  $L$  sia un boundary link, e cerchiamo di capire come sfruttare questa informazione aggiuntiva. Sia dunque  $\mathcal{S}$  il cut system per  $M$  dato dalle due superfici di Seifert disgiunte  $S_1$  e  $S_2$  per le componenti di  $L$ .

Sia  $g_i$  il genere di  $S_i$ , e sia  $\beta_1^i, \dots, \beta_{2g_i}^i$  una base  $H_1(S_i)$ . Definiamo inoltre l'elemento  $(\beta_i^j)^+ \in H_1(V)$  come al solito, "spingendo"  $\beta_i^j$  verso il lato positivo di  $S_i$ . Definiamo le matrici di Seifert  $A^{11}, A^{12}, A^{21}, A^{22}$  come segue:

$$(A^{hk})_{ij} = \text{lk}(\beta_i^h, \beta_j^k), \quad h, k \in \{1, 2\}, \quad i = 1, \dots, 2g_h, \quad j = 1, \dots, 2g_k,$$

Le proprietà di simmetria del linking number implicano che  ${}^t A^{12} = A^{21}$ .

Ricordiamo che il modulo  $\Lambda_2 = \mathbb{Z}[H]$  è naturalmente identificato a  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$  tramite una mappa che porta  $t_i$  nell'elemento di  $H = G/G'$  definito dal meridiano della componente  $i$ -esima di  $L$ .

**Proposizione 8.8.** *Il modulo  $\ker \varphi$  è presentato dalla matrice*

$$B = \begin{pmatrix} {}^t A^{11} - t_1 A^{11} & (1 - t_1) A^{12} \\ (1 - t_2) A^{21} & {}^t A^{22} - t_2 A^{22} \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $V = S^3 \setminus W$ , la stessa dimostrazione fatta nel caso dei nodi mostra che esiste una base  $\gamma_1^1, \dots, \gamma_{2g_1}^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_{2g_2}^2$  di  $H_1(V)$  che è duale ai  $\beta_i^j$ , nel senso che  $\text{lk}(\beta_i^j, \gamma_h^k) = \delta_{ih} \delta_{jk}$ . Naturalmente, i  $\gamma_i^j$  generano  $H_1(\tilde{M} \setminus \tilde{S})$  come  $\Lambda_2$ -modulo. Per l'Osservazione 8.7, allo scopo di ottenere una presentazione di  $\ker \varphi$  dobbiamo ora imporre le relazioni

$$t_i \cdot (\beta_i^i)^+ = (\beta_i^i)^-,$$

scritte nei termini dei  $\gamma_j^i$ . La tesi segue.  $\square$

Il teorema seguente fornisce delle utili ostruzioni che possono servire per dimostrare che un link non è boundary.

**Teorema 8.9.** *Supponiamo che  $L$  sia un boundary link con 2 componenti. Allora  $E_2(L)$  è principale, e un suo qualsiasi generatore  $\Delta_2(L)$  è simmetrico, ovvero verifica l'uguaglianza*

$$\Delta_2(L)(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \doteq \Delta_2(L)(t_1, t_2).$$

*Dimostrazione.* Il fatto che  $E_2(L)$  sia principale è un'immediata conseguenza della Proposizione 8.8: sappiamo che  $E_2(L) = E_0(\ker \varphi)$ , e la Proposizione 8.8 assicura che  $\ker \varphi$  ammette una matrice di presentazione quadrata, per cui  $E_0(\ker \varphi)$  è principale.

Se  $B$  è la matrice descritta nell'enunciato della Proposizione 8.8, la simmetria di  $\Delta_2(L)$  segue da manipolazioni di  $B$  analoghe a quelle fatte in aula per mostrare che il polinomio di Alexander dei nodi è simmetrico. Infatti, sia  $B^-$  la matrice ottenuta da  $B$  sostituendo in  $B$  ogni occorrenza di  $t_i$  con  $t_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , così che  $\Delta_2(L)(t_1, t_2) = \det B$ ,  $\Delta_2(L)(t_1^{-1}, t_2^{-1}) = \det B^-$ . Ora,  $B$  può essere ottenuta da  $B^-$  tramite le operazioni seguenti: moltiplicazione delle prime  $2g_1$  righe per  $t_1$ ; moltiplicazione delle ultime  $2g_2$  righe per  $t_2$ ; trasposizione; cambio di segno dell'intera matrice; moltiplicazione delle prime  $2g_1$  colonne per  $(1 - t_2)$ ; moltiplicazione delle ultima  $2g_2$  colonne per  $(1 - t_1)$ . Segue la tesi.  $\square$

**Corollario 8.10.** *Il link presentato nella Sottosezione 5.2, pur essendo homology boundary, non è boundary.*

**8.3. Il polinomio di Alexander in una variabile.** Sia ora  $L$  un link orientato con componenti  $K_1, \dots, K_n$ , e sia  $M = C(L)$ . Dato un elemento  $c \in H_1(M)$ , è possibile definire il suo linking number totale con  $L$  come segue:

$$\text{lk}(c) = \sum_{i=1}^n \text{lk}(c, K_i).$$

In altre parole, se  $c = \sum_{i=1}^n a_i [m_i]$ , dove  $[m_i] \in H_1(M)$  è la classe dell' $i$ -esimo meridiano, allora  $\text{lk}(c) = \sum_{i=1}^n a_i$ . Il rivestimento associato al kernel della composizione

$$\pi_1(M) \longrightarrow H_1(M) \xrightarrow{\text{lk}} \mathbb{Z}$$

prende il nome di *rivestimento del linking number totale* di  $C(L)$ , e sarà denotato con  $\widetilde{M}_{\text{lk}}$ . Tale rivestimento è ovviamente regolare, e ha gruppo degli automorfismi isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

Se  $S$  è una superficie di Seifert connessa per  $L$ , allora  $\widetilde{M}_{\text{lk}}$  può essere costruito esattamente tramite la stessa procedura descritta a lezione per i nodi: basta osservare che  $S$  non sconnette  $C(L)$ , e che ogni meridiano di  $L$  interseca  $S$  esattamente una volta con segno positivo.

Denotiamo con  $A_0^{\text{lk}}(L)$  e con  $A^{\text{lk}}(L)$  i moduli di omologia  $H_1(\widetilde{M}_{\text{lk}})$  e  $H_1(\widetilde{M}_{\text{lk}}, p^{-1}(x_0))$ , dove  $p: \widetilde{M}_{\text{lk}} \rightarrow M$  è la mappa di rivestimento, e  $x_0$  è un punto base. Poiché il gruppo degli automorfismi del rivestimento del linking number totale è isomorfo a  $\mathbb{Z}$  ed ammette un generatore preferenziale che corrisponde a qualsiasi meridiano di  $L$ , i moduli  $A_0^{\text{lk}}(L)$  e  $A^{\text{lk}}(L)$  sono in modo naturale degli  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -moduli. Sia ora  $A$  una matrice di Seifert relativa alla superficie  $S$ , ovvero una matrice che rappresenti la forma bilineare

$$H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \text{lk}(\alpha, \beta^+).$$

La stessa dimostrazione fatta nel caso dei nodi si applica anche in questo contesto, e produce il seguente:

**Lemma 8.11.** *La matrice*

$${}^t A - {}^t A$$

*è una matrice di presentazione per  $A_0^{\text{lk}}(L)$ . Pertanto, l'ideale elementare di ordine 0 di  $A_0^{\text{lk}}(L)$  è principale.*

Un generatore dell'ideale elementare di ordine 0 di  $A_0^{\text{lk}}(L)$  viene usualmente chiamato *polinomio di Alexander in una variabile* di  $L$ , ed indicato con

$$\Delta(L)(t).$$

Ripercorrendo le dimostrazioni fatte nel caso dei nodi è facile dimostrare la seguente

**Proposizione 8.12.** *Sia  $L$  un link con  $n$  componenti. Allora*

- (1)  $\Delta(L)(t) \doteq \Delta(L)(t^{-1})$ .
- (2) *se  $n \geq 2$ , allora  $\Delta(L)(1) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Il punto (1) non presenta differenze con il caso dei nodi. Per quanto riguarda il punto (2), basta osservare che se  $n \geq 2$  allora esiste una base di  $H_1(S)$  che contiene  $n - 1$  elementi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tali che  $i(\alpha_i, \beta) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n - 1$  e  $\beta \in H_1(S)$ . Ne segue che, detta  $A$  una matrice di Seifert adattata a questa base,  $A - {}^t A$  è diagonale a blocchi, con un blocco nullo sulla diagonale di ordine  $(n - 1) \times (n - 1)$ .  $\square$

Denotiamo ora con  $E_i^{\text{lk}}(L)$  l' $i$ -esimo ideale elementare di  $A^{\text{lk}}(L)$ . Il Corollario 6.1 implica che

$$A^{\text{lk}}(L) \cong A_0^{\text{lk}}(L) \oplus \mathbb{Z}[t, t^{-1}],$$

per cui l' $i$ -esimo ideale elementare di  $A_0^{\text{lk}}(L)$  è uguale a  $E_{i+1}^{\text{lk}}(L)$ . Se ne deduce il seguente

**Corollario 8.13.** *L'ideale  $E_1^{\text{lk}}(L)$  è principale e generato da  $\Delta(L)(t)$ .*

Cerchiamo ora di mettere in relazione gli ideali  $E_i^{\text{lk}}(L)$  con gli ideali di Alexander (in più variabili) di  $L$ . Sia

$$\pi: \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

l'omomorfismo di anelli che fissa  $\mathbb{Z}$  e manda  $t_i$  in  $t$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Se  $A$  è una matrice a coefficienti in  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ , denoteremo con  $\pi(A)$  la matrice ottenuta da  $A$  applicando  $\pi$  a tutti i suoi coefficienti. Dal Teorema 4.3 si deduce che  $A(L)$  ammette una matrice di presentazione  $A$  tale che  $\pi(A)$  sia una matrice di presentazione per  $A^{\text{lk}}(L)$ . Poiché  $\pi$  è surgettiva, se ne deduce la seguente:

**Proposizione 8.14.** *Si ha*

$$E_i^{\text{lk}}(L) = \pi(E_i(L)), \quad i \in \mathbb{N}.$$

La proposizione appena enunciata mostra che gli ideali di Alexander in una variabile ottenuti tramite l'uso di una superficie di Seifert per  $L$  sono in effetti controllati dagli ideali di Alexander del link. Visto che  $E_1^{\text{lk}}(L) = \pi(E_1(L))$ , ci si potrebbe aspettare anche che  $\Delta(L)(t) = \pi(\Delta_1(L))$ . Tuttavia, questa uguaglianza non è vera in generale (anzi, non è mai vera a meno che si abbia  $\Delta(L)(t) = 0$ ,  $\Delta_1(L) = 0$ ). Il fatto è che l'immagine tramite  $\pi$  del massimo comun divisore degli elementi di  $E_1(L)$  divide senz'altro tutti gli elementi di  $E_1^{\text{lk}}(L)$ , per cui  $\pi(\Delta_1(L))$  divide  $\Delta(L)(t)$ . Tuttavia, può capitare che elementi coprimi in  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$  vengano proiettati da  $\pi$  su elementi con fattori comuni non banali, per cui non è detto che  $\Delta(L)(t)$  divida  $\pi(\Delta_1(L))$ . Per esempio, nel caso del Whitehead link si ha  $\Delta_1(L)(t_1, t_2) = (t_1 - 1)(t_2 - 1)$ , in quanto  $t_1 - 1$  e  $t_2 - 1$  non hanno divisori comuni, mentre  $\Delta(L)(t) = (t - 1)^3$ . In effetti, il fenomeno appena descritto accade per ogni link:

**Proposizione 8.15.** *Si supponga che  $L$  abbia almeno due componenti. Allora*

$$\Delta(L)(t) \doteq (t - 1)\pi(\Delta_1(L)).$$

*Dimostrazione.* La tesi è un'immediata conseguenza delle Proposizioni 8.3 e 8.14.  $\square$

Inoltre, i Teoremi 8.4 e 8.9 implicano il seguente:

**Corollario 8.16.** *Sia  $L$  un homology boundary link con due componenti. Allora*

$$\Delta(L)(t) = 0.$$

*Inoltre, se  $L$  è boundary l'ideale  $E_2^{\text{lk}}(L)$  è principale ed ammette un generatore simmetrico (ovvero tale che  $p(t) \doteq p(t^{-1})$ ).*