Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 14/6/2017

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1.

(i) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare con curvatura nulla. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in una retta.

(ii) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con torsione nulla. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in un piano.

(iii) Si dia un esempio di una superficie che non sia contenuta in un piano avente curvatura Gaussiana nulla in ogni punto.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - x^2)^2 + (z - x^3)^2 = 1\} \ ,$$

e si considerino le curve $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ date da

$$\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)\,, \quad \beta(t) = (t, t^2 + 1, t^3) \ .$$

(i) Si mostri che S è una superficie regolare, e che le curve α, β hanno valori in S.

(ii) Si dica se α sia una geodetica di S.

(iii) Si dica se esiste una riparametrizzazione di β che sia una geodetica di S. A questo scopo è lecito sfruttare la seguente formula per la curvatura geodetica di β, dove N rappresenta un versore normale alla superficie:

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle N(\beta(t)) \wedge \beta'(t), \beta''(t)\rangle}{\|\beta'(t)\|^2} \ .$$

Soluzione.
(i): L'insieme S è luogo di zeri della funzione differenziabile $F(x, y, z) = (y-x^2)^2+(z-x^3)^2-1$, il cui gradiente si annulla quando

$$\begin{cases} -4x(y - x^2) - 6x^2(z - x^3) = 0 \\ 2(y - x^2) = 0 \\ 2(z - x^3) = 0 \end{cases}$$

Ora, se (x, y, z) soddisfa le ultime due condizioni, allora $F(x, y, z) = -1$, dunque $(x, y, z) \notin S$. Ciò mostra che S è una superficie liscia. Il fatto che α e β siano supportate in S è una banale verifica.

(ii): Per quanto visto al punto (i), un vettore normale nel punto $\alpha(t)$ è dato da

$$\nabla F(0, \cos t, \sin t) = (0, 2\cos t, 2\sin t) \ ,$$

per cui possiamo scegliere un versore normale $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ tale che $N(\alpha(t)) = (0, \cos t, \sin t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ora $\alpha''(t) = -(0, \cos t, \sin t) = -N(\alpha(t))$, per cui α è una geodetica di S.

(iii): Si ha $\nabla F(\beta(t)) = (-4t, 2, 0)$, per cui $N(\beta(t)) = (-2t, 1, 0)/\sqrt{1+4t^2}$. Inoltre $\beta'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\beta''(t) = (0, 2, 6t)$, per cui

$$\langle N(\beta(t)) \wedge \beta'(t), \beta''(t)\rangle = \frac{-12t^3 - 6t}{\sqrt{1+4t^2}} \ .$$

Ne segue che la curvatura geodetica di β non è identicamente nulla, per cui nessuna riparametrizzazione di β può essere geodetica.

Esercizio 3.
Si considerino le superfici

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < z < 1\} \ ,$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\} \ ,$$

sia $h\colon (0,1) \to (0,+\infty)$ una funzione liscia tale che $h'(z) > 0$ per ogni z, e si consideri la funzione

$$F\colon S \to C \ , \quad F(x,y,z) = h(z)\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right) \ .$$

(i) Si mostri che F è un diffeomorfismo con la sua immagine.
(ii) Si dimostri che, se $h(z)h'(z) = \sqrt{2}/2$ per ogni $z \in (0,1)$, allora per ogni regione A di S, l'area di A è uguale all'area di $F(A)$ (suggerimento: si sfrutti la mappa $\varphi(u,v) = (\sqrt{1-u^2}\cos v, \sqrt{1-u^2}\sin v, u)$, opportune restrizioni della quale forniscono un atlante per S).
(iii) Si determini, se esiste, una funzione h tale che F sia un'isometria locale.

Soluzione.
(i) Dalle ipotesi su h discende che h è un diffeomorfismo sulla sua immagine, per cui F ammette l'inversa

$$G(x,y,z) = \left(\frac{x\sqrt{1-h^{-1}(z)^2}}{z}, \frac{y\sqrt{1-h^{-1}(z)^2}}{z}, h^{-1}(z)\right) \ ,$$

che è chiaramente liscia.

(ii): Un banale calcolo mostra che, posto $\psi = F \circ \varphi$, si ha $F(\varphi(u,v)) = h(u)(\cos v, \sin v, 1)$. Poiché F è un diffeomorfismo locale, opportune restrizioni di ψ forniscono un atlante per $f(S) \subseteq C$. Siano I_φ e I_ψ le martici delle prime forme fondamentali di S e C rispetto a φ e ψ, rispettivamente. Allora

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-u^2} & 0 \\ 0 & 1-u^2 \end{pmatrix} \ , \quad I_\psi = \begin{pmatrix} 2h'(z)^2 & 0 \\ 0 & h(z)^2 \end{pmatrix} \ .$$

Una condizione sufficiente (e necessaria) affinché F preservi le aree è che $\det I_\varphi = \det I_\psi$, ovvero che $h(z)h'(z) = \sqrt{2}/2$.

(iii): Come visto a lezione, la curvatura della sfera è uguale ad 1 in ogni suo punto, mentre la curvatura del cono è uguale a 0 in ogni suo punto. Dunque non esistono isometrie locali tra S e C.