Soluzioni compito del 17/02/2014

Es. 1. Sia $f(x,y) = x^3 + y^2 - \ln(y^2 + 3x)$.

(a) Calcolare il dominio D di f e tracciarne un disegno approx;

(b) Calcolare l'Hessiano di f in ogni punto di D;

(c) Determinare i punti stazionari e stabilire se si tratta di punti di massimo o minimo relativo o di sella;

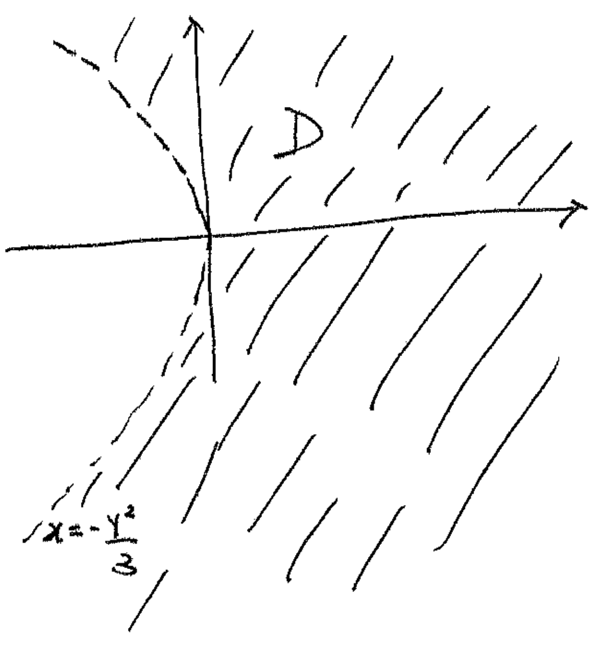
(d) Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f nel punto $P = (0,1)$.

Risoluzione

(a) i pti del dominio sono gli (x,y) per cui l'argomento del logaritmo è strettamente positivo:

$$D = \{(x,y) : y^2 + 3x > 0\}$$

$\leadsto$ D è delimitato dal grafico della parabola $x = -\frac{y^2}{3}$



(b) f è derivabile infinite volte nel suo dominio per cui ammette sviluppo di Taylor d'ogni ordine nell'intorno di ogni suo punto.

Si calcola facilmente che $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - \frac{3}{y^2+3x},\ 2y\left(1-\frac{1}{y^2+3x}\right)\right)$

da cui $f_{xx} = 6x + \frac{9}{(y^2+3x)^2}$, $f_{yx} = \left(\frac{6y}{(y^2+3x)^2}\right)$,

$$f_{yy} = 2 - \frac{2}{y^2+3x} + \frac{4y^2}{(y^2+3x)^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + \frac{9}{(y^2+3x)^2} & \frac{6y}{(y^2+3x)^2} \\ \frac{6y}{(y^2+3x)^2} & 2 - \frac{2}{y^2+3x} + \frac{4y^2}{(y^2+3x)^2} \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in D$$

(c) Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene $2y\left(1 - \frac{1}{y^2+3x}\right) = 0$

che ha soluzioni $\to y = 0 \quad (\mathrm{I})$
$\to y^2+3x = 1 \quad (\mathrm{II})$

nel caso (I) imponendo $3x^2 - \frac{3}{y^2+3x} = 0$ e $y = 0$ si ha

$$3x^2 - \frac{1}{x} = 0 \iff 3x^3 - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$\rightsquigarrow P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right)$ è stazionario;

nel caso (II) imponendo $3x^2 - \frac{3}{y^2+3x} = 0$ e $y^2+3x = 1$

si ha $3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

se $x = 1$ $\quad y^2+3x = 1$ non ha soluzioni

se $x = -1$ $\quad y^2+3x = 1 \implies y^2 = 4 \iff y = \pm 2$

$P_2 = (-1,-2)$; $P_3 = (-1,2)$ sono gli altri 2 pti stazionari.

Per stabilirne la natura calcoliamo il valore di Hf:

$$Hf(P_1) = Hf\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt[3]{3}} + \frac{9\sqrt[3]{9}}{9} & 0 \\ 0 & 2\left(1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ è una matrice diagonale con valori $>0 \Rightarrow P_1$ è un pto di minimo locale.

$$Hf(-1,-2) = Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \leadsto \det Hf(P_2) < 0$$

$\Rightarrow P_2 = (-1,-2)$ è un pto di sella

$$Hf(-1,2) = Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \leadsto \det Hf(P_3) < 0$$

$\Rightarrow P_3 = (-1,2)$ è un pto di sella.

(d) Si calcola che $f(0,1) = 1$, $\nabla f(0,1) = (-3,0)$, $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

da cui $f(x,y) = \mathrm{Pol}_{\deg 2}(f,(0,1)) + o(x^2+(y-1)^2)$

$$= 1 - 3x + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}, (x, y-1) \right\rangle + o(x^2+(y-1)^2) =$$

$$= 3 + \frac{9}{2}x^2 + 2y^2 + 6xy - 9x - 4y + o(x^2+y^2+1-2y)$$

Es.2. Si consideri il campo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$F(x,y) = \left(2x + \frac{1}{y^2+1}, -\left(y^3 \sin(y^4) + \frac{2xy}{y^2+1}\right)\right)$$

e sia $\gamma(t) = \left(e^{\sin(t)}, \frac{2\cos(t)}{\cos^2(t)+1}\right)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Dire, giustificando la risposta, se F è conservativo;

(b) Calcolare il lavoro di F lungo la curva data.

Risoluzione

(a) Poiche' il dominio di F è tutto $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso per vedere che F è conservativo basta vedere che F è irrotazionale: si calcola subito che $\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{2y}{y^2+1} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$\Rightarrow F$ è conservativo.

(b) Per calcolare il lavoro di F lungo γ, visto che F è conservativo, si può considerare una qualsiasi altra curva $\tilde{\gamma}$ che connette $\gamma(0)$ e $\gamma(\pi)$, oppure calcolare un potenziale di F.

Si ha che $U(x,y) = x^2 + \frac{x}{y^2+1} + \frac{\cos(y^4)}{4}$ è un potenziale.

$\gamma(0) = (1,1)$, $\gamma(\pi) = (1,-1)$

$$\int_\gamma F = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(1,-1) - U(1,1) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos(1)}{4} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos(1)}{4}\right) = 0$$