Prima scritta di Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

4 dicembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1 [7pt].

a) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ soluzioni di

$$z^8 + 2z^4 + 4 = 0$$

b) Tra le radici trovate considerare quelle con parte reale positiva e determinare l'area del poligono che descrivono.

Soluzione.

a) Ponendo $z^4 = t$ otteniamo l'equazione

$$t^2 + 2t + 4 = 0$$

che ha soluzioni $t_1 = -1 + i\sqrt{3}$ e $t_2 = -1 - i\sqrt{3}$. In particolare t_1 e t_2 sono numeri complessi di modulo 2 e di argomendo rispettivamente $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{-2\pi}{3}$, ovvero:

$$t_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \qquad t_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}.$$

Risolvendo $z^4 = t$ per i due valori di t otteniamo:

- (per $t = t_1$) $z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi i}{6} + \frac{ki\pi}{2}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$;
- (per $t = t_2$) $z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{-\pi i}{6} + \frac{ki\pi}{2}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$;

quindi le soluzioni sono:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}); \qquad z_2 = \sqrt[4]{2}(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2});$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}); \qquad z_4 = \sqrt[4]{2}(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2});$$

$$z_5 = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}); \qquad z_6 = \sqrt[4]{2}(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2});$$

$$z_7 = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}); \qquad z_8 = \sqrt[4]{2}(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2});$$

b) Le soluzioni con parte reale positiva sono z_1, z_4, z_5, z_6. Queste descrivono un trapezio con basi $\overline{z_4 z_6}$ di lunghezza $\sqrt[4]{2}$ e $\overline{z_1 z_5}$ di lunghezza $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$. L'altezza è $\sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})$ e dunque l'area è $A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 2 [13pt]. Sia $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)}$ definita per $x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

a) Determinare le zone in cui f è convessa ed i suoi eventuali punti stazionari.

b) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x = 0$.

c) Calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

d) Risolvere l'equazione $y'(x) + 2\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = 3x + 1$ con dato inziale $y(0) = -1$.

Soluzione. a) La funzione è infinite volte derivabile sull'intervallo per cui posso studiare il segno della derivata seconda. Si ha

$$f'(x) = \frac{2x\sin(x) + \cos(x)}{\cos^3(x)} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{4\sin(x)\cos(x) + 2x + 4x\sin^2(x)}{\cos^4(x)}.$$

Si vede subito che per $x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ si ha $\sin(x) > 0, \cos(x) > 0, x > 0$ da cui $f''(x) > 0$ e per $x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$ si ha $\sin(x) < 0, \cos(x) > 0, x < 0$ da cui $f''(x) < 0$. f è quindi convessa solo su $x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ (e concava su $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$ con flesso in $x = 0$). Per le stesse considerazioni sopra si ha anche che $f' > 0$ su $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, ossia f non ha punti stazionari.

b) Si ha $\cos^2(x) = (1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = 1 - x^2 + o(x^2)$. Usando lo sviluppo di Taylor di $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ per $\alpha = -1$ e componendo con $y = -x^2 + o(x^2)$ si ottiene

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 - x^2 + o(x^2)} = 1 - (-x^2 + o(x^2) + o(-x^2 + o(x^2)) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

e

$$\frac{x}{\cos^2(x)} = x(1 + x^2 + o(x^2)) = x + x^3 + o(x^3).$$

c) La funzione è dispari per cui l'integrale è nullo.

d) Una soluzione v di $y'(x) + 2\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = 0$ è data da $v(x) = e^{A(x)}$ dove

$$A(x) = -\int 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = 2\ln(\cos(x)) = \ln(\cos^2(x)),$$

ossia $v(x) = \cos^2(x)$. Rimane da calcolare una soluzione particolare data da

$$y_p(x)v^{-1}(x) = \int \frac{3x+1}{\cos^2(x)}\,dx = 3\Big[x\tan(x) - \int \tan(x)\,dx\Big] + \tan(x) = (3x+1)\tan(x) + 3\ln(\cos(x))$$

Si ottiene la soluzione $y(x) = y_p(x) + Cv(x)$ ed imponendo $y(0) = -1$ si ha

$$y(x) = (3x+1)\sin(x)\cos(x) + 3\cos^2(x)\ln(\cos(x)) - \cos^2(x).$$

Esercizio 3 [10pt]. Si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 + kx_3 - kx_4 \\ x_1 + kx_2 + kx_3 + 5x_4 \\ 2x_1 - 10x_2 + (k+1)x_3 - 3kx_4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dimensione dell'immagine e del nucleo di T_k;
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $w_k = (1, k, -1)$ appartiene all'immagine di T_k;
c) Posto $k = 0$ si determini la controimmagine di w_0 mediante T_0.

Soluzione.

a) La matrice associata all'applicazione lineare è

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & k & -k \\ 1 & k & k & 5 \\ 2 & -10 & k+1 & -3k \end{pmatrix}$$

che si può trasformare con operazioni di riga (alla seconda si sottrae la prima, alla terza si sottrae 2 volte la prima) in

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & k & -k \\ 0 & k+5 & 0 & 5+k \\ 0 & 0 & -k+1 & -k \end{pmatrix}$$

e dunque se $k = -5$ il rango è 2, altrimenti il rango è 3. Quindi per $k = -5$ l'applicazione T_k ha immagine di dimensione 2 e nucleo di dimensione $4 - 2 = 2$, mentre per $k \neq -5$ la dimensione dell'immagine di T_k è 3 e quella del nucleo è 1.

b) Per $k \neq -5$ l'applicazione T_k è sempre surgettiva, quindi il vettore w_k sta sempre nell'immagine.

Per $k = -5$ la matrice M_k (matrice incompleta del sistema) diventa

$$M_{-5} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & -5 & 5 \\ 2 & -10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & -10 & -4 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

che con le trasformazioni di riga fatte sopra diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 e dunque il sistema non ha soluzioni e il vettore $w_{-5} = (1, -5, -1)$ non sta nell'immagine.

c) La matrice M_0 è

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo nucleo ha dimensione 1 ed è generato da $v = (5, 1, 0, -1)$. Inoltre il vettore $u = (0, -1/5, -3, 0)$ è nella controimmagine di w_0, in quanto $M_0 u = w_0$. Quindi per $k = 0$ la controimmagine di w_0 rispetto all'applicazione T_0 è data da $u + \langle v \rangle$.

Prima scritta di Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema ZW

4 dicembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1 [7pt].

a) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ soluzioni di

$$z^8 - 2z^4 + 4 = 0$$

b) Tra le radici trovate considerare quelle con parte reale positiva e determinare l'area del poligono che descrivono.

Soluzione.

a) Ponendo $z^4 = t$ otteniamo l'equazione

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

che ha soluzioni $t_1 = 1 + i\sqrt{3}$ e $t_2 = 1 - i\sqrt{3}$. In particolare t_1 e t_2 sono numeri complessi di modulo 2 e di argomendo rispettivamente $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{-\pi}{3}$, ovvero:

$$t_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}, \qquad t_2 = 2e^{\frac{-\pi i}{3}}.$$

Risolvendo $z^4 = t$ per i due valori di t otteniamo:
- (per $t = t_1$) $z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi i}{12}+\frac{ki\pi}{2}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$;
- (per $t = t_2$) $z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{-\pi i}{12}+\frac{ki\pi}{2}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$;

quindi le soluzioni sono:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})); \qquad z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12}));$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})); \quad z_4 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{7\pi}{12}) - i\sin(\frac{7\pi}{12}) = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) - i\sin(\frac{5\pi}{12}));$$

$$z_5 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})); \qquad z_6 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}));$$

$$z_7 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})); \quad z_8 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{5\pi}{12}) - i\sin(\frac{5\pi}{12}));$$

b) Le soluzioni con parte reale positiva sono z_1, z_4, z_5, z_6. Queste descrivono un trapezio con basi $\overline{z_4 z_6}$ di lunghezza $2\sqrt[4]{2}\sin(\frac{5\pi}{12})$ e $\overline{z_1 z_5}$ di lunghezza $2\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{12})$. L'altezza è $\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) - \cos(\frac{5\pi}{12}))$ e dunque l'area è

$$\begin{aligned} A &= 4\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{5\pi}{12}))(\cos(\frac{\pi}{12}) - \cos(\frac{5\pi}{12})) = \\ &= 4\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\sin(\frac{5\pi}{6}) + \sin(-\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}) = \\ &= 2\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Esercizio 2 [13pt]. Sia $f(x) = -\dfrac{x}{\cos^2(x)}$ definita per $x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

a) Determinare le zone in cui f è convessa ed i suoi eventuali punti stazionari.
b) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x = 0$;
c) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$:
d) Risolvere l'equazione $y'(x) + 3\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = -x\cos(x)$ con dato inziale $y(0) = 1$.

Soluzione. a) Stessa soluzione della versione precedente cambiata di segno: f è quindi convessa solo su $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$ (e concava su $x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ con flesso in $x = 0$). Analogamente $f' < 0$ su $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, ossia f non ha punti stazionari.
b) Stessa soluzione della versione precedente cambiata di segno:

$$-\frac{x}{\cos^2(x)} = -x(1 + x^2 + o(x^2)) = -x - x^3 + o(x^3).$$

c) Si integra per parti e si ottiene

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) - \int \tan(x)\,dx = x\tan(x) + \ln(\cos(x))$$

da cui

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = -\frac{\pi}{4} + \ln(2).$$

d) Una soluzione v di $y'(x) + 3\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = 0$ è data da $v(x) = e^{A(x)}$ dove

$$A(x) = -\int 3\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = 3\ln(\cos(x)) = \ln(\cos^3(x)),$$

ossia $v(x) = \cos^3(x)$. Rimane da calcolare una soluzione particolare data da

$$y_p(x)v^{-1}(x) = -\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = -x\tan(x) - \ln(\cos(x))$$

Si ottiene la soluzione $y(x) = y_p(x) + Cv(x)$ ed imponendo $y(0) = 1$ si ha

$$y(x) = -\sin(x)\cos^2(x) - \cos^3(x)\ln(\cos(x)) + \cos^3(x).$$

Esercizio 3 [10pt]. Si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 - kx_3 + kx_4 \\ 2x_1 - 10x_2 - 3kx_3 + (k+1)x_4 \\ x_1 + kx_2 + 5x_3 + kx_4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dimensione dell'immagine e del nucleo di T_k;
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $w_k = (1, -1, k)$ appartiene all'immagine di T_k;
c) Posto $k = -1$ si determini la controimmagine di w_{-1} mediante T_{-1}.

Soluzione.

a) La matrice associata all'applicazione lineare è

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -k & k \\ 2 & -10 & -3k & k+1 \\ 1 & k & 5 & k \end{pmatrix}$$

che si può trasformare con operazioni di riga (alla seconda si sottrae due volte la prima, alla terza si sottrae una volta la prima) in

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -k & k \\ 0 & 0 & -k & -k+1 \\ 0 & k+5 & k+5 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque se $k = -5$ il rango è 2, altrimenti il rango è 3. Quindi per $k = -5$ l'applicazione T_k ha immagine di dimensione 2 e nucleo di dimensione $4 - 2 = 2$, mentre per $k \neq -5$ la dimensione dell'immagine di T_k è 3 e quella del nucleo è 1.

b) Per $k \neq -5$ l'applicazione T_k è sempre surgettiva, quindi il vettore w_k sta sempre nell'immagine.

Per $k = -5$ la matrice M_k (matrice incompleta del sistema) diventa

$$M_{-5} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & -10 & 15 & 4 \\ 1 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 15 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

che con le trasformazioni di riga fatte sopra diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 e dunque il sistema non ha soluzioni e il vettore $w_{-5} = (1, -1, -5)$ non sta nell'immagine.

c) La matrice M_0 è

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo nucleo ha dimensione 1 ed è generato da $v = (5, 1, 0, -1)$. Inoltre il vettore $u = (0, -1/5, 0, -3)$ è nella controimmagine di w_0, in quanto $M_0 u = w_0$. Quindi per $k = 0$ la controimmagine di w_0 rispetto all'applicazione T_0 è data da $u + \langle v \rangle$.