Compito di Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

8 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Dato il numero complesso $w = \dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i}$ determinare tutte le soluzioni di

$$\frac{1+iz}{i\bar{z}+1} = w^2.$$

Disegnare poi nel piano complesso l'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - w^{-4}| = 2\}$.

Soluzione: Notiamo che $w = \dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} - i = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Si calcola subito che $w^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ e l'equazione da studiare diventa

$$\frac{1+iz}{i\bar{z}+1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

ovvero

$$2(1+iz) = \left(1-i\sqrt{3}\right)(1+i\bar{z})$$

ovvero

$$2 + i2z = 1 - i\sqrt{3} + i\bar{z} + \bar{z}\sqrt{3}$$

da cui, scrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e separando parte reale e parte immaginaria otteniamo:

$$\begin{cases} 2(1-b) = 1 + b + a\sqrt{3} \\ 2a = -\sqrt{3} + a - b\sqrt{3} \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} -a\sqrt{3} - 3b = -1 \\ a + b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

che si può riscrivere

$$\begin{cases} -\sqrt{3}a - 3b = -1 \\ \sqrt{3}a + 3b = -3 \end{cases}$$

che chiaramente non può avere soluzione.

Dato che $w = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, si ha $w^{-1} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $w^{-4} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. L'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - w^{-4}| = 2\}$ corrisponde ai punti del piano complesso con distanza 2 dal punto $w^{-4} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Concludendo D è la circonferenza di centro il punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ corrrispondente al numero compleso $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}i-1}{2}$ e raggio 2.

Esercizio 2.

a) Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}$ che in $x=0$ vale 1.

b) Determinare tutti gli eventuali asintoti e le zone di convessità/concavità di F.

c) Determinare poi il suo sviluppo di Taylor di ordine 2 in $x=0$.

Soluzione:

a) Facendo la sostituzione $e^x=t$ ci si riduce ad un integrale di funzione razionale. Con i metodi standard si ottiene che una generica primitiva è data da

$$F(x)=x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+\arctan(e^x)+C$$

e imponendo la condizione $F(0)=1$ si ha $C=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}+1$.

b) Usando che $\ln(e^{2x}+1)=\ln(e^{2x}(1+e^{-2x}))=2x+\ln(e^{-2x}+1)$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x-\frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1)+\arctan(e^x)+C\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}+1$$

quindi F ha l'asintoto orizzontale $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}+1$ a $+\infty$. Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-x-\frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1)+\arctan(e^x)+C\right)=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+\arctan(e^x)+C\right)}{x}=1.$$

Rimane da calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}(F(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+\arctan(e^x)+C\right)=-\frac{3\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}+1$$

quindi F ha l'asintoto obliquo $y=x-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}+1$ a $-\infty$.

Si calcola

$$F'(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}+1},\qquad F''(x)=-\frac{e^x(e^{2x}-1+2e^x)}{e^{2x}+1}.$$

Il segno di F'' equivale al segno di z^2+2z-1 con $z=e^x$ e si ottiene $F''(x)\geq 0$ quando $e^x\leq\sqrt{2}-1$ ossia F è convessa su $x\leq\ln(\sqrt{2}-1)$ e concava su $x\geq\ln(\sqrt{2}-1)$.

c) Dal conto sopra si ottiene $F'(0)=1, F''(0)=-1$ da cui $F(x)=1+x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Esercizio 3. È data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3k & 3 & k+2 \\ 1 & k & k \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;
b) si stabilisca per quali valori di k il vettore $(k, 3, 3)$ appartiene all'immagine di T;
c) posto $k = 2$ si trovino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = (2, 3, 3)$;
d) posto $k = 3$ si trovino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = (3, 3, 3)$.
e) per $k = 0$ dire se esiste l'inversa di T ed eventualmente calcolarne la matrice associata.

Soluzione:

a) La matrice ha determinante $-k^2 + 3k - 2 = -(k-1)(k-2)$, dunque per $k \neq 1, 2$ l'applicazione T è invertibile dunque il suo nucleo ha dimensione 0 e la sua immagine ha dimensione 3; per $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi $\dim \operatorname{Im} T = 2$ e $\dim \ker T = 3 - 2 = 1$; per $k = 2$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi $\dim \operatorname{Im} T = 2$ e $\dim \ker T = 3 - 2 = 1$;

b) per $k \neq 1, 2$ l'applicazione T è surgettiva, quindi il vettore $(k, 3, 3)$ appartiene all'immagine; per $k = 1$ possiamo calcolare il rango della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

che è 3; questo si vede ad esempio perché riducendo a scala la sottomatrice ottenuta con prima, seconda e quarta colonna otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

e dunque il vettore non appartiene all'immagine; infine per $k = 2$ possiamo calcolare il rango della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e questo è 2 (la seconda riga è uguale alla terza, mentre la prima non è proporzionale alle altre due) e dunque il vettore appartiene all'immagine;

c) pe $k = 2$ il nucleo della matrice associata a T è generato dal vettore $(2, 8, -9)$ (si può trovare ad esempio col metodo di Gauss) e una controimmagine di $(2, 3, 3)$ è data $(-1, 0, 2)$. Quindi i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = (2, 3, 3)$ sono tutti i vettori della forma $v = (-1, 0, 2) + t(2, 8, -9)$ per $t \in \mathbb{R}$;

d) per $k = 3$ l'applicazione T è invertivile, quindi la controimmagine di $(3, 3, 3)$ è data da un solo vettore; risolvendo il sistema col metodi di Gauss si ottiene che $T(3, 12, -12) = (3, 3, 3)$;

e) per $k = 0$ la matrice è invertibile, come visto nel punto a) e l'inversa della matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$