

Esercizi per il corso di Istituzioni di Matematica

Funzioni, grafici, domini, immagini

Nel seguito per funzione si intenderà funzione reale di variabile reale, ossia definita su (un sottoinsieme di) \mathbb{R} ed a valori in \mathbb{R} .

1. Trovare funzioni f, g, h con $f \neq g$ tali che
 - a) $h \circ f = h \circ g$;
 - b) $f \circ h = g \circ h$;
 - c) $f \circ f = g \circ g$.
2. Dire se le condizioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surgettiva implicano
 - a) $f \circ g$ surgettiva;
 - b) $g \circ f$ surgettiva.
3. Sia f crescente; trovare delle condizioni per cui
 - a) $f^2 = f \circ f$ sia crescente;
 - b) $f^3 = f \circ f \circ f$ sia crescente.
4. Trovare la forma analitica, dominio ed immagine di $f \circ g$ quando f, g sono date da
 - a) $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x} - 1}$, $g(x) = \sin x$;
 - b) $f(x) = \frac{x-1}{2x+5}$, $g(x) = x^2 + x$;
 - c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $g(x) = (x+2)^2$.

Equazioni e disequazioni

1. Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt{3x - 2\sqrt{x} - 1} = \sqrt{-1 - x}.$$

2. Risolvere la seguente disequazione

$$|x - 1| - |x - 3| \geq |x - 2| - |x - 4|.$$

3. Risolvere la seguente disequazione al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$|x - a| - |x - 3a| \geq |x - 2a| - |x - 4a|.$$

4. Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{|x - 1|}{x + 4} > \frac{|x - 4|}{x - 2},$$

sugli insiemi dei numeri reali, naturali ed interi, rispettivamente.

5. Risolvere le seguenti disequazioni

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} > x - 2;$

b) $\sqrt{x^2 - 2} > -3.$

6. Dire se le seguenti disequazioni sono equivalenti:

(i) $\frac{\sqrt{x+2} + 5x}{x+2} > -2;$

(ii) $\sqrt{x+2} + 5x > -2(x+2).$

7. Dire se le seguenti disequazioni sono equivalenti:

(i) $\frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \leq x;$

(ii) $(x-1)\sqrt{x+1} \leq x\sqrt{x}.$

8. Risolvere le seguenti disequazioni

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2;$

b) $3 \cos^2 x - 2 \sin x \geq 2.$