Soluzioni della Prima prova in Itinere
di ISTITUZIONI DI MATEMATICA 1
del 29 novembre 2015

Qui sotto trovate la risoluzione della Seconda parte-TEMA A, gli altri temi si svolgevano analogamente. Le risposte corrette della Prima parte sono inserite direttamente nella griglia posta alla base di ogni tema nel file pdf dell'esame scritto. Per completezza inseriamo qui sotto la risoluzione precisa dell'esercizio 7-tema 1 della Prima parte.

Prima parte - Tema 1.

7) La sostanza radioattiva A ha tempo di dimezzamento di 10 anni. Raggiunge un terzo della massa iniziale in
A: $10\log(3)/\log(2)$ anni; B: $10\log(1/3)$ anni; C: $10\log(2/3)$ anni;
D: $10\log(2)/\log(3)$ anni; E: N.A.

Soluzione.

Poiché il tempo di dimezzamento è di 10 anni, detta m_0 la massa iniziale, dopo un tempo di t anni la nuova massa è diventata

$$m_t = m_0(1/2)^{t/10}.$$

Dunque, affinché la massa finale sia 1/3 della massa iniziale, si deve avere

$$(1/2)^{t/10} = 1/3$$

e quindi

$$e^{\log(1/2)t/10} = e^{\log(1/3)}$$

da cui, uguagliando gli esponenti:

$$\log(1/2)t/10 = \log(1/3)$$

e quindi

$$t = 10\frac{\log(1/3)}{\log(1/2)} = 10\frac{-\log(3)}{-\log(2)} = 10\log(3)/\log(2).$$

La risposta corretta è dunque la A.

Seconda parte - Tema A.

Esercizio 1.

(a) Determinare tutti i numeri complessi z soluzioni dell'equazione

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0.$$

(b) Siano z_1 e z_2 le due radici con parte reale minore, z_3, z_4 le due radici con parte reale maggiore. Di queste siano z_1 e z_3 quelle con parte immaginaria positiva. Calcolare l'area del triangolo che ha per vertici z_1, z_2, z_3^2.

Soluzione.

(a) Ponendo $y = z^2$ si ottiene l'equazione $y^2 - 2y + 2 = 0$ e dunque $y = 1 \pm \sqrt{1-2}$, ovvero $y = 1 \pm i$. Risolviamo ora le due equazioni $z^2 = 1 + i$ e $z^2 = 1 - i$.

Ponendo $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ otteniamo dalla prima $a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$ e dunque

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a^2 = (1 \pm \sqrt{2})/2$ e dunque scartando la soluzione negativa (il quadrato di un numero reale è sempre positivo),

$$a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \qquad b = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

cioè $z = \pm(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}})$.

Analogamente la seconda soluzione da come risultato $z = \pm(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}})$.

(b) Le radici con parte reale minore sono quelle con parte reale negativa:

$$z_{1,2} = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

e di conseguenza la terza radice richiesta è

$$z_3 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

e $z_3^2 = 1 + i$. Quindi il triangolo cercato ha base, data dai punti z_1, z_2, di lunghezza $l = 2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ e altezza $h = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + 1$. L'area è pertanto $H = lh/2$, cioè

$$H = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\Big(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + 1\Big) = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Data la retta r passante per i punti $(1, 1)$ e $(-3, 0)$

(i) Determinare il punto medio M dei punti dati e la retta s ortogonale a r passante per M;

(ii) Trovare i vettori di modulo 1 che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il versore direzione della retta r.

(iii) Individuare le due rette s_1, s_2 passanti per il punto M e che formano un angolo di ampiezza $\pi/4$ con la retta data r.

Soluzione.

(i) Detti $P_1 = (1, 1), P_2 = (-3, 0)$, il punto medio è dato da $M = (P_1 + P_2)/2 = (-1, 1/2)$. La retta r per P_1, P_2 ha equazione $(x - 1)/(-3 - 1) = (y - 1)/(0 - 1)$ ovvero

$$r : \qquad x - 4y + 3 = 0$$

e una sua ortogonale generica ha la formula

$$4x + y + a = 0$$

e quindi, imponendo il passaggio per M, otteniamo l'equazione di s:

$$s : \qquad 4x + y + 7/2 = 0.$$

(ii) Il versore di r è dato normalizzando il vettore $(4, 1)$, dunque $v = (4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$ (va bene anche $-v$).

I vettori $w = (s, t)$ di modulo 1 che formano con v un angolo di $\pi/4$ sono quelli che soddisfano la seguente condizione per il prodotto scalare: $(v, w) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Pertanto dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} s^2 + t^2 = 1 \\ 4s/\sqrt{17} + t/\sqrt{17} = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione ricaviamo $t = -4s + \sqrt{34}/2$ e sostituendo nella prima otteniamo $s^2 + (-4s + \sqrt{34}/2)^2 - 1 = 0$, quindi

$$17s^2 - 4\sqrt{34}s + 15/2 = 0$$

e dunque $s = (4 \pm 1)/\sqrt{34}$, $t = (1 \mp 4)/\sqrt{34}$.

(iii) Cerchiamo ora delle rette con vettore direzione dato da uno dei due w trovati nel punto precedente. Dunque hanno equazione generica (possiamo moltiplicare per $\sqrt{34}$) data da $s_1 : 3x + 5y + c = 0$, $s_2 : 5x - 3y + d = 0$.

Imponendo il passaggio per M otteniamo:

$$s_1 : \qquad 3x + 5y + 1/2 = 0$$
$$s_2 : \qquad 5x - 3y + 13/2 = 0$$

Esercizio 3.

(i) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua.

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)5^{(x-\frac{1}{2})} & \text{per } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}\sqrt{x+4} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(ii) Calcolare, per il valore di a trovato nel punto precedente, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Soluzione.

(i) Ricordando che le funzioni elementari come l'esponenziale $y \to 5^y$ sono continue, fissato $a \in \mathbb{R}$, nell'intervallo aperto $(-\infty, 0)$ la funzione $f(x)$ coincide con la funzione $5^{(x-\frac{1}{2})}$ moltiplicata per la costante $a+1$, è quindi continua perché composizione di funzione continue. Analogamente nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$ f è ottenuta moltiplicando e sottraendo funzioni elementari continue come le radici, e dividendo per la funzione continua $x \to x$ che non si annulla mai su $(0, +\infty)$. Rimane da stabilire se f è continua nel punto $x = 0$. Per valutarne la continuità è necessario calcolare (se esistono) limiti destri e sinistri nel punto $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to0-}(a+1)5^{(x-\frac{1}{2})} = (a+1)5^{-\frac{1}{2}} = (a+1)\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Visto che il limite destro si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, usiamo l'identità $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$ valida per $a, b \geq 0$ ed applicata con $a = \sqrt{x+5}$, $b = \sqrt{5}$. Usando la continuità della funzione radice si ha

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}\sqrt{x+4} = \frac{x}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}\sqrt{x+4} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

I due limiti sono uguali se e solo se $a+1 = 1$ ossia $a = 0$. Nel caso $a = 0$ anche $f(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ da cui segue che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ solo per $a = 0$.

(ii) Per $a = 0$, tenendo conto che gli esponenziali con base maggiore di 1 vanno a zero a meno infinito, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5^{(x-\frac{1}{2})} = 0.$$

Raccogliendo $\sqrt{x}$ nei due termini al numeratore si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{5})\sqrt{x+4}}{x} = \left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{\frac{5}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{4}{x}} = 1.$$

Esercizio 4. Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{| x^2 - 8x + 15 |} < 2\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2(\pi(x+3)) \geq \frac{1}{4}\}.$$

(i) Calcolare il sup e l'inf dell'insieme A e dire se A ammette massimo e/o minimo.

(ii) Calcolare il sup e l'inf dell'insieme $A \cap B$ e dire se $A \cap B$ ammette massimo e/o minimo.

Soluzione.

(i) Risolviamo prima la disequazione $\sqrt[3]{| x^2 - 8x + 15 |} < 2$. Poiché la funzione $t \to \sqrt[3]{t}$ è iniettiva e crescente si ha che

$$\sqrt[3]{| x^2 - 8x + 15 |} < 2 \iff | x^2 - 8x + 15 | < 2^3 = 8.$$

Usando che $|y| < r \iff -r < y < r$ se ne deduce

$$x \in A \iff -8 < x^2 - 8x + 15 < 8.$$

Da cui

$$x \in A \iff x^2 - 8x + 7 < 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 8x + 23 > 0$$

. Poiché l'equazione $x^2 - 8x + 7 = 0$ ha le radici $1, 7$ e l'equazione $x^2 - 8x + 23 = 0$ non ha radici reali si ha

$$x^2 - 8x + 7 < 0 \iff 1 < x < 7$$

e

$$x^2 - 8x + 23 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vale a dire $A = (1, 7)$. L'estremo superiore di A è 7 ma non è il suo massimo, L'estremo inferiore di A è 1 ma non è il suo minimo.

(ii) Risolviamo prima la disuguaglianza $\sin^2(\pi(x+3)) \geq \frac{1}{4}$. Essa equivale a verificare una delle due condizioni sotto

$$\frac{1}{2} \leq \sin(\pi(x+3)) \leq 1 \quad \text{oppure} -1 \leq \sin(\pi(x+3)) \leq -\frac{1}{2}.$$

Riscrivendola nella variabile y come

$$\frac{1}{2} \leq \sin(y) \leq 1 \quad \text{oppure} -1 \leq \sin(y) \leq -\frac{1}{2},$$

e tenendo conto che

$$\sin(y) = \frac{1}{2} \qquad \text{se} \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\sin(y) = -\frac{1}{2} \qquad \text{se} \quad y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad y = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

si ottiene

$$\sin^2(y) \geq \frac{1}{4} \iff \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Imponendo $y = \pi(x+3)$ ed $x \in A$, ossia $1 < x < 7$ si ha $4\pi < y < 10\pi$ da cui si deduce che gli intervalli periodici sopra intersecano $(4\pi, 12\pi)$ solo per $k = 2, 3, 4$ e, dividendo per π e sottraendo 3 dagli estremi di questi intervalli, si ha

$$A \cap B = (1,7) \cap \bigcup_{k=2,3,4} \left(\left[-\frac{17}{6} + 2k, -\frac{13}{6} + 2k \right] \cup \left[-\frac{11}{6} + 2k, -\frac{7}{6} + 2k \right] \right),$$

vale a dire

$$A \cap B = (1,7) \cap \bigcup_{k=0,1,2} \left(\left[\frac{7}{6} + 2k, \frac{11}{6} + 2k \right] \cup \left[\frac{13}{6} + 2k, \frac{17}{6} + 2k \right] \right).$$

Il primo intervallo dell'unione è dato da $\left[\frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right]$ che contiene 1 al suo interno, ossia $\left[\frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right] \cap (1,7) = \left(1, \frac{11}{6}\right]$ da cui l'estremo inferiore di $A \cap B$ è 1 ma non è un minimo per $A \cap B$. L'ultimo intervallo dell'unione è $\left[\frac{1}{6} + 6, -\frac{1}{6} + 7\right]$ e si ha $\left[\frac{1}{6} + 6, -\frac{1}{6} + 7\right] \cap (1,7) = \left[\frac{1}{6} + 6, -\frac{1}{6} + 7\right]$ da cui l'estremo superiore di $A \cap B$ è $-\frac{1}{6} + 7 = \frac{41}{6}$ che è anche massimo per l'insieme.

Concludendo

$$\text{(i)} \ \sup_A = 1 \quad \inf_A = 7 \quad A \text{ non ammette ne' max ne' min}$$

$$\text{(ii)} \ \sup_{A \cap B} = \frac{41}{6} = \max_{A \cap B} \quad \inf_{A \cap B} = 1 \quad A \cap B \text{ non ammette minimo.}$$