Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

23 luglio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos(\alpha^{-n}))\alpha^n}{n^{1/2}+n^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Consideriamo la convergenza assoluta della serie. Si può confrontare dall'alto la serie data con quella con termine n-esimo $\frac{2|\alpha|^n}{n^{1/2}+n^\alpha}$. Usando la stima $\sqrt[n]{n^{1/2}} \leq \sqrt[n]{n^{1/2}+n^\alpha} \leq \sqrt[n]{2n^{\alpha\vee(1/2)}}$ si ottiene che per ogni valore $\alpha \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{1/2}+n^\alpha} = 1.$$

Applichiamo il criterio della radice ennesima a questa seconda serie:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2|\alpha|^n}{n^{1/2}+n^\alpha}} \leq |\alpha|$$

da cui, per confronto, la serie iniziale converge assolutamente per $|\alpha| < 1$. Rimane da vedere cosa succede per $|\alpha| > 1$ ed $|\alpha| = 1$. Se $|\alpha| > 1$ si ha che $1/|\alpha|^n \to 0$ ed anche $1/\alpha^n \to 0$. Usando lo sviluppo di $\cos(x)$ in $x = 0$ si ha il fattore $(1-\cos(\alpha^{-n}))\alpha^{2n}$ tende ad 1 e ci si può ridurre a studiare la convergenza assoluta della serie $\frac{1}{(\alpha^n)(n^{1/2}+n^\alpha)}$. Usando il criterio della radice si deduce che la serie converge assolutamente anche per $|\alpha| > 1$.

Se $\alpha = 1$ la serie ha termine n-esimo $\frac{1-\cos(1)}{n^{1/2}+n}$ e diverge positivamente per confronto con la serie armonica $1/n$. Se $\alpha = -1$ la serie diventa

$$\frac{1-\cos((-1)^n)}{n^{1/2}+\dfrac{1}{n}}(-1)^n = \frac{1-\cos(1)}{n^{1/2}+\dfrac{1}{n}}(-1)^n.$$

Si verifica che la successione $n \to n^{1/2}+\dfrac{1}{n}$ è crescente (basta derivare la funzione $\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$) per cui applicando il criterio di Leibniz si ha che la serie converge.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$(1-i)z^6 + 2i|z|^2 z = 0.$$

Soluzione. Si nota che $z = 0$ è una soluzione dell'equazione data per cui si può dividere entrambi i membri dell'equazione per z e cercare le altre soluzioni non nulle. L'equazione è equivalente all'identità tra i due numeri complessi

$$(1-i)z^5 = -2i|z|^2.$$

Scriviamo z in forma esponenziale complessa come $z = \rho e^{i\theta}$ e equagliamo intanto i moduli dei due numeri complessi a destra e sinistra del segno di uguale:

$$|1-i||z|^5 = \rho^5\sqrt{2} = |2i||z|^2 = 2\rho^2$$

da cui $\rho = 0$ o $\rho^3 = \sqrt{2}$. Visto che cerchiamo soluzioni non nulle si ha che $\rho = \sqrt[6]{2}$. Rimane da calcolare l'angolo θ. Sempre dalla stessa equazione, sostituendo $\rho = \sqrt[6]{2}$, o meglio uguagliando gli argomenti dei numeri complessi coinvolti si ottiene

$$e^{-\pi i/4}e^{i5\theta} = e^{-i\pi/2}$$

ossia $5\theta = -\pi/4 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ che è equivalente a $\theta = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2\pi k}{5}$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'x(\ln(x^2)+1) = y\ln(x)$$

tale che $y(e) = 2$.

Soluzione. Si tratta di un'equazione a variabili separabili per cui si ha

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\ln(x)}{x(\ln(x^2)+1)}\,dx.$$

Con il cambio di variabile $t = \ln(x)$ si deve calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{t}{2t+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2t+1}\Big).$$

Si calcola

$$\int \frac{t}{2t+1}\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\ln\Big(t+\frac{1}{2}\Big) + c = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\ln\Big(2t+1\Big) + c$$

da cui

$$y(x) = Ce^{\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(2t+1\right)} = Ce^{\frac{t}{2}}\Big(e^{\ln\left(2t+1\right)}\Big)^{-1/4} \qquad \text{con } t = \ln(x)$$

e

$$y(x) = C\sqrt{x}(2\ln(x)+1)^{-1/4} = C\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2\ln(x)+1}}.$$

Imponendo $y(e) = 2$ si ricava C:

$$C = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio 4. Determinare massimi e minimi assoluti e locali su $[-1, 20]$ della funzione

$$f(x) = \frac{2|x| - x^2 - x}{x + 2}.$$

Calcolare poi una sua primitiva.

Soluzione. La funzione f coincide con $\dfrac{x - x^2}{x + 2}$ per $x \geq 0$ e con $\dfrac{-3x - x^2}{x + 2}$ per $x < 0$. La funzione è continua su $[-1, 20]$ per cui ammette massimo e minimo assoluti. f è anche derivabile in $(-1, 0) \cup (0, 20)$ e vale

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4x - 2}{(x + 2)^2} \quad x \in (0, 20), \;\; f'(x) = -\frac{x^2 + 4x + 6}{(x + 2)^2} \quad x \in (-1, 0).$$

I punti di massimo e minimo locali (ed anche assoluti) si trovano cercando i punti in cui si annulla la derivata e confrontando con il valore che f assume sugli estremi dell'intervallo di derivabilità: $-1, 0, 20$.

Sull'intervallo $(0, 20)$ f' si annulla solo nel punto $x_1 = \sqrt{6} - 2$ essendo negativa a destra di questo punto e positiva a sinistra, da cui si deduce che x_1 è un punto di massimo locale (ed assoluto su $[0, 20]$ ma non è detto lo sia su tutto $[-1, 20]$). Sull'intervallo $(-1, 0)$ f' è sempre negativa ossia la funzione f è decrescente su $(-1, 0)$. Il valore massimo è quindi il più grande tra $f(-1)$ ed $f(x_1)$. Il valore minimo è il più piccolo tra $f(0)$ ed $f(20)$. $f(0) = 0$ mentre $f(20) < 0$ implica che $f(20) = \min f$. Analogamente si verifica che $f(-1) = 1$ è il massimo.

Si calcola facilmente che le primitive di f ristretta a $[0, 20]$ sono della forma

$$F_1(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - 6 \ln(x + 2) + c_1$$

e su $[-1, 0]$

$$F_2(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x + 2) + c_2.$$

Imponendo che $F_1(0) = F - 2(0)$, ossia $c_1 = 8 \ln(2) + c_2$, si ottengono tutte le primitive di f su $[-1, 20]$.