Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

11 gennaio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-3x} + x^3 \quad \text{tale che } \ y(0) = \beta = y'(0).$$

(2) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ stabilire se esiste (ed in caso quanto vale) $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Soluzione.

(1) Si tratta di un'equazione differenziale linerae a coefficienti costanti con termini esponenziali e polinomi per cui le soluzioni sono date dalla somma di una qualsiasi soluzione dell'eq. omogenea e da una soluzione particolare. Le soluzioni v dell'omogenea si determinano imponendo la forma $v(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e si trova $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, da cui $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. E' noto che questi esponenziali corrispondono alle soluzioni reali $e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. $\Big($Si ricorda che

$$e^{\lambda x} = e^{(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i)x} = e^{-\frac{x}{2}} e^{\pm \frac{\sqrt{3}}{2} ix} = e^{-\frac{x}{2}} \Big[\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big) \pm \sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big) \Big]. \Big)$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione si impone che $u(x) = Ae^{-3x} + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ e si trova $A = 1/7$, $B = 1$, $C = -3$, $D = 0$ e $E = 6$. La soluzione generica è quindi data da

$$\frac{e^{-3x}}{7} + x^3 - 3x^2 + 6 + \alpha e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \gamma e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

al variare di $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\alpha = \beta - \frac{43}{7}, \quad \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\beta + \frac{3}{7} + \frac{\alpha}{2}\Big) = \sqrt{3}\beta - \frac{37}{7\sqrt{3}}.$$

(2) Fissato $\beta \in \mathbb{R}$ e presi α e γ come sopra la soluzione è data da

$$y(x) = \alpha e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \gamma e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{e^{-3x}}{7} + x^3 - 3x^2 + 6;$$

Passando al limite per $x \to +\infty$ nei primi tre addendi si ottiene che essi vanno a zero indipendentemente dal valore di β visto che gli esponenziali $e^{-x/2}, e^{-3x}$ tendono a zero e sono moltiplicati da funzioni limitate. Rimane da passare al limite nel polinomio e si calcola facilmente che questo limite diverge positivamente, ossia

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 6 = +\infty.$$

Esercizio 2. Sia
$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1+(\beta-1)x+\alpha\tan^2 x}{\beta+\tan x+\tan^2(x)}dx$$

a) Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha = 1, \beta = 1$;

b) Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha = 0, \beta = 1$;

c) Studiare l'esistenza di $I_{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$.

Soluzione.

a) Si applica il cambio di variabile $t = \tan(x)$ $(x = \arctan(t))$ e su ogni intervallo $[0, L]$ con $0 < L < \pi/2$ si ottiene
$$\int_0^L \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x+\tan^2(x)}dx = \int_0^{\tan(L)} \frac{1+t^2}{1+t+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan(L)} \frac{1}{1+t+t^2}dt$$
Passando al limite per $L \to +\infty$ si ha che l'esistenza dell'integrale generalizzato dato coincide con l'esistenza dell'integrale generalizzato di $1/(1+t+t^2)$ su $(0,+\infty)$ che esiste per confronto con $1/(1+t^2)$. Si ha inoltre che
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x+\tan^2(x)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt =$$
Posto $s = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ $\left(ds = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dt\right)$ si ha
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}ds$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{M\to+\infty}\int_{1/\sqrt{3}}^{M} \frac{1}{s^2+1}ds = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Si procede analogamente con lo stesso cambio di variabile e ci si riduce a calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x+\tan^2(x)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt.$$
Si cerca la decomposizione
$$\frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{Ct+D}{(1+t+t^2)}$$
e si trova $A = -1$, $C = -1$, $B = 0$ e $D = 1$. Contando che
$$\frac{t+1}{(1+t+t^2)} = \frac{1}{2}\frac{(2t+1)}{(1+t+t^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t+t^2)}$$
si ha
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t+1}{(1+t+t^2)} - \frac{t}{(1+t^2)}\right)dt =$$
$$\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\Big[\ln(1+t+t^2) - \ln(1+t^2)\Big]_0^M + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)}dt$$
L'ultimo integrale è già stato calcolato prima per cui si ottiene
$$= \frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\ln\left(\frac{1+M+M^2}{1+M^2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)}dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

c) Si tratta di studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \geq 0$ un integrale generalizzato su una semiretta della funzione

$$\frac{1 + (\beta - 1)x + \alpha \tan^2 x}{\beta + \tan x + \tan^2(x)}.$$

Il denominatore $\beta + \tan x + \tan^2(x)$ non si annulla mai se non per $\beta = 0$ (in $x = 0$). In particolare se $\beta > 0$, con il cambio $\tan(x) = t$, l'esistenza dell'integrale è equivalente a quella di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + (\beta - 1)x + \alpha \tan^2 x}{\beta + \tan x + \tan^2(x)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 + (\beta - 1)\arctan(t) + \alpha t^2}{(\beta + t + t^2)(1 + t^2)}\, dt.$$

Indipendentemente da α questo secondo integrale esiste perchè la funzione $(1 + (\beta - 1)\arctan(t) + \alpha t^2)/(\beta + t + t^2)(1 + t^2)$ è assolutamente integrabile su $(0, +\infty)$ per confronto con la funzione $1/(1 + t^2)$, infatti

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|1 + (\beta - 1)\arctan(t) + \alpha t^2|}{(\beta + t + t^2)(1 + t^2)}(1 + t^2) = |\alpha|.$$

Se $\beta = 0$ la funzione non è limitata nell'intorno di $x = 0$ per cui bisogna studiare separatamente la sua integrabilità su $(0, \pi/4)$ e su $(\pi/4, \pi/2)$. Con il cambio di variabile sopra equivale a studiare l'integrabilità di $f(t) = (1 - 1\arctan(t) + \alpha t^2)/(t + t^2)(1 + t^2)$su $(0, 1)$ e su $(1, +\infty)$. Analogamente a prima su $(1, +\infty)$ f è integrabile per confronto con $1/(t^2 + 1)$, invece su $(0, 1)$ f ha integrale più infinito per confronto con la funzione $1/t$, indipendentemente da α.

Infatti

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1 - 1\arctan(t) + \alpha t^2}{(t + t^2)(1 + t^2)} t = 1.$$

Notare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f è positiva in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 3.

a) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z-i)^3 = 8i.$$

b) Determinare tutte le $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (z-i)^3 = 8i \\ \bar{z}(w+\bar{w}) = i(\bar{z}-z) - |w| - z. \end{cases}$$

Soluzione.

a) Posto $z - i = w$ si ha che w risolve l'equazione $w^3 = 8i$. Per trovare le radici terze di $8i$ usiamo la forma trigonometrica:

$$8i = 2^3 e^{i\pi/2} \Rightarrow w_k = 2e^{i\theta_k},\ \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2$$

vale a dire

$$w_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i,\ w_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = 2e^{i9\pi/6} = -2i$$

da cui, usando, $z = i + w$,

$$z_0 = \sqrt{3} + 2i,\ z_1 = -\sqrt{3} + 2i, z_2 = -i.$$

b) La prima equazione del sistema è già stata risolta nel punto a) ed è soddisfatta per $z = z_0, z_1, z_2$. Per quanto riguarda la seconda equazione si riscrive, usando $w+\bar{w} = 2Re(w)$ e $\bar{z} - z = -2iIm(z)$, come

$$\bar{z}2Re(w) = -i^2 2Im(z) - |w| - z$$

da cui

$$Re(z)2Re(w) - i2Re(w)Im(z) = 2Im(z) - |w| - Re(z) - iIm(z).$$

Uguagliando le parti immaginarie dei numeri a destra e sinistra dell'uguale si ha $2Re(w)Im(z) = Im(z)$ che è soddisfatta se $Im(z) = 0$ oppure se $2Re(w) = 1$. Dato che i numeri complessi z che soddisfanno la prima equazione hanno parte immaginaria non nulla allora ogni soluzione w deve soddisfare $Re(w) = 1/2$. A questo punto si uguagliano le parti reali, con la condizione $Re(w) = 1/2$, e si ottiene

$$Re(z) = 2Im(z) - |w| - Re(z)$$

ossia

$$|w| = 2Im(z) - 2Re(z).$$

Si ottiene che $w = \frac{1}{2} + ib$ con b che verifica $\frac{1}{4} + b^2 = (2Im(z) - 2Re(z))^2$; sostituendo $z_0 = \sqrt{3} + 2i$ si ha $w_0^+ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{16(7-4\sqrt{3})-1}}{2}$ e $w_0^- = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{16(7-4\sqrt{3})-1}}{2}$; sostituendo $z_1 = \sqrt{3} - 2i$ si ha $w_1^+ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{16(7+4\sqrt{3})-1}}{2}$ e $w_1^- = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{16(7+4\sqrt{3})-1}}{2}$; sostituendo $z_2 = -i$ si ha $|w| = 2Im(z) - 2Re(z) = -2$ che non può mai essere vera. Le uniche coppie soluzione del sistema sono quindi $(z_0, w_0^+), (z_0, w_0^-), (z_1, w_1^+), (z_1, w_1^-)$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

11 gennaio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{3x} + x^3 \quad \text{tale che } \; y(0) = \beta = y'(0).$$

(2) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ stabilire se esiste (ed in caso quanto vale) $\lim_{x \to -\infty} y(x)$.

Soluzione.

Si procede come nella risoluzione della versione X e si ottiene

$$\frac{e^{3x}}{7} + x^3 + 3x^2 - 6 + \alpha e^{x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \gamma e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

al variare di $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\alpha = \beta + \frac{41}{7}, \quad \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\beta - \frac{3}{7} - \frac{\alpha}{2}\Big) = \frac{\beta}{\sqrt{3}} - \frac{47}{7\sqrt{3}}.$$

Passando al limite per $x \to -\infty$ si ha $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$ indipendentemente dal valore di β.

Esercizio 2. Sia
$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\beta x+\alpha\tan^2 x}{\beta+1+\tan x+\tan^2(x)}dx$$

a) Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha = 1, \beta = 0$;

b) Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha = 0, \beta = 0$;

c) Studiare l'esistenza di $I_{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$.

Soluzione. I valori dei punti a), b) sono gli stessi della versione X; per quanto riguarda il punto c) invece si ha integrabilità per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \geq 0$ (infatti stavolta per $\beta = 0$ il denominatore non presenta zeri).

Esercizio 3.

a) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$(i - z)^3 = 8i.$$

b) Determinare tutte le $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (z - i)^3 = 8i \\ \bar{z}(w + \bar{w}) = i(\bar{z} - z) - |w| - z. \end{cases}$$

Soluzione.

Posto $i - z = w$ si procede come nella versione X e si ottengono le soluzioni $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 3i$. Il sistema al punto b) è esattamente lo stesso della versione X.