



- 1) Calcolare i pesi della formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a_1 f(-1) + a_2 f(1/2) + a_3 f(1) + E_2(f)$$

in modo da ottenere il massimo grado di precisione.

Posto $E_2(f) = K f^{(s)}(\xi)$, determinare K ed s .

- 2) Una persona decide quale mezzo utilizzare tra AUTOMOBILE, TRENO, AEREO, per affrontare un viaggio secondo il seguente prospetto con l'ausilio di una moneta NON equilibrata con la quale si ha TESTA con probabilità p e CROCE con probabilità $q = 1 - p$.

Se il viaggio precedente era stato effettuato con

automobile : si prende il treno se lanciando la moneta si ottiene croce o l'aereo se risulta testa;

treno : si viaggia in automobile se lanciando la moneta si ottiene testa o l'aereo se risulta croce;

aereo : si sceglie l'automobile se si ottiene testa ed il treno se si ha croce.

- Costruire la matrice di transizione della catena di Markov?
- Classificare gli stati della catena di Markov.
- Determinare la distribuzione limite.
- Posto $p = 1/3$, qual é la probabilità che al centesimo viaggio si scelga l'aereo?

- 3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{4} & \text{se } 2 < x \leq 4, \\ \frac{1}{6} & \text{se } 4 < x \leq 5, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Calcolare $E[X]$
- Calcolare $Var(X)$.
- Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

SOLUZIONE

- 1) Si impone che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ ottenendo il sistema lineare

$$\begin{array}{rrrr} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 2 \\ -a_1 & + & \frac{1}{2}a_2 & + & a_3 & = & 0 \\ a_1 & + & \frac{1}{4}a_2 & + & a_3 & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

la cui soluzione é

$$a_1 = \frac{5}{9}, \quad a_2 = \frac{16}{9}, \quad a_3 = -\frac{1}{3}.$$

Ponendo $f(x) = x^3$, si ha $E_2(x^3) = \frac{2}{3}$ per cui la formula ha grado di precisione $m = 2$. Segue che deve risultare $s = m + 1 = 3$ e $K = \frac{E_2(x^3)}{3!} = \frac{1}{9}$.

- 2) La matrice di transizione é

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

La catena risulta irriducibile e gli stati sono tutti transitori.

La distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ é

$$\pi = \frac{1}{2+p-p^2}(2p-p^2, 1-p^2, 1-p+p^2).$$

Posto $p = 1/3$, la distribuzione limite risulta $\pi = (1/4, 2/5, 7/20)$ per cui la probabilità richiesta é $7/20$.

- 3) Con semplici calcoli si ricavano

$$E[X] = \frac{31}{12}, \quad E[X^2] = \frac{17}{2}, \quad Var(X) = \frac{263}{144}.$$

La funzione di ripartizione $F(x)$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{6}x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} & \text{se } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{se } 5 < x \end{cases}.$$