Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **14/02/07**

1) È data la tabella

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & \alpha & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 1 & -1 & -1 & \alpha & 7 \end{array}, \quad \alpha \in R\,.$$

Determinare i valori reali di α ($\alpha \neq 0, 1, 2, 3$) che rendono minimo il grado del polinomio che interpola i punti assegnati. Calcolare i polinomi di interpolazione corrispondenti.

2) Una catena di Markov ha la seguente matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

a) Classificare gli stati della catena di Markov.

b) Determinare le distribuzioni limite.

c) Calcolare le probabilità di assorbimento.

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Si lancia un dado equilibrato a 4 facce con i numeri da 1 a 4. Subito dopo si lancia una moneta equilibrata tante volte quanto è il numero ottenuto con il dado.
Si indichi con N la variabile che indica il punteggio ottenuto con il dado e con T la variabile che indica il numero di teste ottenuto con i lanci della moneta.

a) Determinare la densità congiunta $f(n, t)$ delle due variabili N e T.

b) Calcolare le densità marginali $f_N(n)$ e $f_T(t)$.

c) Determinare la densità condizionata $P(N|T)$.

Soluzione

1) Si costruisce il quadro delle differenze divise

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$	$DD3$
0	1	$--$	$--$	$--$
1	-1	-2	$--$	$--$
3	7	2	2	$--$
2	α	$(\alpha-1)/2$	$(\alpha+3)/2$	$(1-\alpha)/2$
α	-1	$-2/\alpha$	$2/\alpha$	$2(1-\alpha)/(\alpha(\alpha-3))$

.

Il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo se per i valori di α che rendono costante la colonna relativa alle differenze divise DD3 per cui se α è soluzione dell'equazione

$$\frac{1-\alpha}{2} = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-3)}$$

e quindi se risolve l'equazione $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha + 4 = 0$.
I valori cercati sono

$$\alpha_1 = -1\,, \qquad \alpha_2 = 4$$

($\alpha_3 = 1$ non è accettabile).
Se $\alpha = -1$ si ha $P_4(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.
Se $\alpha = 4$ si ha $P_4(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 8x^2 - \frac{17}{2}x + 1$.

2) La catena risulta riducibile e presenta una classe chiusa $C^{(1)} = \{E_2, E_4\}$ mentre gli stati E_1, E_3, E_5 sono transitori.
Si ha una unica distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ data da

$$\pi = \frac{1}{9}(0, 4, 0, 5, 0)\,.$$

Le probabilità di assorbimento sono (ovviamente)

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_3 = 1\,, \quad \lambda_5 = 1\,.$$

Per calcolare i tempi medi di assorbimento si risolve il sietma lineare

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 1 + \tfrac{1}{3}\eta_1 + \tfrac{1}{3}\eta_5 \\
\eta_3 &= 1 + \tfrac{1}{5}\eta_1 + \tfrac{1}{5}\eta_3 + \tfrac{1}{5}\eta_5 \\
\eta_5 &= 1 + \tfrac{1}{2}\eta_1 + \tfrac{1}{4}\eta_5
\end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\eta_1 = \frac{13}{4}\,, \quad \eta_3 = \frac{47}{16}\,, \quad \eta_5 = \frac{7}{2}\,.$$

		T				
		0	1	2	3	4
	1	1/8	1/8	0	0	0
N	2	1/16	2/16	1/16	0	0
	3	1/32	3/32	3/32	1/32	0
	4	1/64	4/64	6/64	4/64	1/64

Table 1: $f(n,t)$

3) La densità congiunta $f(n,t)$ risulta dalla Tabella 1. Le densità marginali sono

$$f_N(n) = \begin{cases} 1/4 & n = 1 \\ 1/4 & n = 2 \\ 1/4 & n = 3 \\ 1/4 & n = 4 \end{cases} \quad , \qquad f_T(t) = \begin{cases} 15/64 & t = 0 \\ 26/64 & t = 1 \\ 16/64 & t = 2 \\ 6/64 & t = 3 \\ 1/64 & t = 4 \end{cases} \quad .$$

La densità condizionata richiesta si calcola come da definizione e cioè

$$P(N = n|T = t) = \frac{P(N = n, T = t)}{P(T = t)} = \frac{f(n,t)}{f_T(t)} \ .$$

Si ottiene quindi la Tabella 2

		T				
		0	1	2	3	4
	1	8/15	8/26	0	0	0
N	2	4/15	8/26	4/16	0	0
	3	2/15	6/26	6/16	2/6	0
	4	1/15	4/26	6/16	4/6	1

Table 2: $P(N = n|T = t)$