



Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 18/02/09

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

supponendo che sia la matrice dei coefficienti di un sistema lineare.

- a) Determinare i valori α per i quali converge il metodo di Jacobi.
- b) Determinare i valori α per i quali converge il metodo di Gauss-Seidel.
- c) Quale metodo è consigliabile scegliere per valori di α in cui i due metodi risultano entrambi convergenti?

2) In un'isola ci sono 4 piccole cittadine con, rispettivamente, 100, 200, 600 e 1000 abitanti disposte come i vertici di un quadrato.

Nel corso di un anno il 20% degli abitanti di ciascuna città si sposta in ugual misura in una delle due città adiacenti.

- a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
- b) Classificare gli stati della catena.
- c) Quale sarà la popolazione di ciascuna città dopo un anno? Dopo due anni?
- d) Quale sarà la distribuzione della popolazione dopo 100 anni?

3) Due variabili X e Y hanno la seguente densità congiunta

		Y		
		20	40	60
X	10	3α	α	0
	20	2α	4α	2α
	30	α	2α	5α

- a) Calcolare la costante reale α .
- b) Calcolare le densità marginali.
- c) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$ e $Var(Y)$.
- dc) Calcolare $Cov(X, Y)$.

SOLUZIONE

- 1) Le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono, rispettivamente

$$H_J = -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & -\alpha \\ 0 & -4\alpha^3 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice H_J sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2\alpha,$$

per cui risulta $\rho(H_J) = 2|\alpha|$ ed il metodo è convergente se $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

Gli autovalori della matrice H_{GS} sono

$$\mu_{1,2} = 0, \quad \mu_3 = 4\alpha^2,$$

per cui risulta $\rho(H_{GS}) = 4|\alpha|^2$ ed il metodo è convergente se $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

Si deve scegliere il metodo di Gauss-Seidel che ha la matrice di iterazione con raggio spettrale inferiore a quello della matrice di iterazione di Jacobi.

- 2) La matrice di transizione, indicati con $E_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$, gli stati della catena corrispondenti alle quattro cittadine, è

$$T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

La catena risulta irriducibile e regolare. Gli stati sono tutti transitori.

La popolazione dopo un anno è

$$p^{(1)} = p^{(0)}T = (100, 200, 600, 1000)T = (200, 230, 600, 870),$$

e dopo due anni

$$p^{(2)} = p^{(1)}T = (270, 264, 590, 776).$$

La matrice T è bistocastica per cui la distribuzione limite o invariante risulta

$$\pi = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1).$$

Segue che la distribuzione della popolazione dopo 100 anni è

$$(475, 475, 475, 475).$$

- 3) Si deve avere $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$ per cui si ottiene $\alpha = \frac{1}{20}$.
Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } x = 10 \\ \frac{2}{5} & \text{se } x = 20 \\ \frac{2}{5} & \text{se } x = 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{20} & \text{se } y = 20 \\ \frac{7}{20} & \text{se } y = 40 \\ \frac{7}{20} & \text{se } y = 60 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Segue

$$E[X] = 22, \quad E[X^2] = 540, \quad Var(X) = 56,$$

$$E[Y] = 41, \quad E[Y^2] = 1940, \quad Var(Y) = 259.$$

La variabile $Z = XY$ ha densità

$$g(z) = \begin{cases} \frac{3}{20} & \text{se } z = 200 \\ \frac{3}{20} & \text{se } z = 400 \\ \frac{1}{20} & \text{se } z = 600 \\ \frac{4}{20} & \text{se } z = 800 \\ \frac{4}{20} & \text{se } z = 1200 \\ \frac{5}{20} & \text{se } z = 1800 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

per cui $E[Z] = E[XY] = 970$ e $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 68$.