Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 17/02/10

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & 0 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ -1+\sqrt{2} & 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

a) Calcolare gli autovalori di A.

b) Calcolare $\mu_2(A)$.

c) La matrice A soddisfa le ipotesi di convergenza del metodo delle potenze? (argomentare la risposta)

2) La matrice di transizione di una catena di Markov è

$$T = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena.

c) Determinare le probabilità di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densitá

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } -2 \le x \le -1.5 \,, \\ \frac{1}{2} & \text{se } -1.5 < x \le -1 \,, \\ \frac{1}{8} & \text{se } -1 < x \le 1 \,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad , K \in R \,,$$

a) Determinare K.

b) Calcolare $E[X]$

c) Calcolare $Var(X)$.

d) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

Soluzione

1) La matrice data è riducibile nella forma

$$B = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Segue che gli autovalori di A sono gli autovalori dei due blocchi diagonali di B. Si ha quindi

$$\lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 2\sqrt{2}\,,\ \lambda_3 = -2\,,\ \lambda_4 = -2\sqrt{2}\,.$$

La matrice A è reale e simmetrica per cui il numero di condizionamento

$$\mu_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} = \sqrt{2}\,.$$

La matrice A risulta diagonalizzabile ma non ha un autovalore dominante in modulo per cui NON sono verificate le condizioni di convergenza del metodo delle potenze.

2) la matrice di transizione risulta riducibile. Si hanno due classi chiuse $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_1, E_4\}$, $\mathcal{C}^{(2)} = \{E_2, E_5\}$ ed un solo stato transitorio E_3.
La probabilità $\lambda_3^{(1)}$ di assorbimento nella classe chiusa $\mathcal{C}^{(1)}$ verifica l'equazione

$$\lambda_3^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda_3^{(1)}$$

da cui si ha $\lambda_3^{(1)} = \frac{2}{3}$. Segue che la probabilità di assorbimento nell'altra classe chiusa è $\lambda_3^{(2)} = \frac{1}{3}$.
Il tempo medio di assorbimento η_3 soddisfa l'equazione

$$\eta_3 = 1 + \frac{1}{4}\eta_3$$

per cui $\eta_3 = \frac{4}{3}$.

3) Imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ si ottiene $K = 1$.
Si ha quindi

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = -\frac{19}{16}\,, \\ E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{97}{48}\,, \\ Var(X) &= E[X^2] - E^2[X] = \frac{469}{768}\,. \end{aligned}$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -2\,, \\ x+2 & \text{se } -2 \le x \le -1.5\,, \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} & \text{se } -1.5 < x \le -1\,, \\ \frac{1}{8}x + \frac{7}{8} & \text{se } -1 < x \le 1\,, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad .$$