



- 1) Studiare l'equazione

$$x + \log x - K = 0, \quad K \in \mathbb{R},$$

indicando il numero delle radici reali al variare del parametro reale K .

Posto $K = 2$ separare le radici reali e studiare la convergenza dei metodi

a) $x_{i+1} = 2 - \log x_i$;

b) metodo di Newton.

Approssimare la radice reale più grande con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-3}$.

- 2) Una catena di Markov ha matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- a) La catena risulta riducibile?
- b) Classificare gli stati della catena.
- c) Determinare la distribuzione limite.
- c) Determinare le probabilità di assorbimento.
- d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

- 3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ K & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1/5 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Determinare la costante reale K .
- b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.
- c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

SOLUZIONE

- 1) Con una separazione grafica si evidenzia che l'equazione ha una sola soluzione reale per ogni valore reale di K .

Posto $K = 2$, l'unica soluzione reale é separata dall'intervallo

$$\alpha \in I =]1.5, 2[.$$

Il primo metodo proposto ha funzione di iterazione $\phi(x) = 2 - \log x$ che ha derivata prima $\phi'(x) = -1/x$. Risulta $|\phi'(x)| \leq 2/3$ per cui il metodo proposto é convergente.

Per quanto riguarda il metodo di Newton, considerando $f(x) = x + \log x - 2$, le derivate $f'(x) = 1 + 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ risultano, rispettivamente, di segno positivo e di segno negativo per i valori $x \in I$ per cui il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie $x_0 = 1.5$.

Applicando uno dei due metodi si ottiene $\alpha \in]1.557, 1.558[$.

- 2) La catena risulta riducibile.

Indicando con E_1, E_2, E_3, E_4 gli stati della catena, si ha una classe chiusa $C = \{E_1, E_3, E_4\}$, ed il solo stato transitorio E_2 .

La distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ é $\pi = \frac{1}{24}(8, 0, 3, 13)$.

L'unica probabilità di assorbimento nella classe chiusa C é (chiaramente) $\lambda_2 = 1$.

Il tempo medio di assorbimento si ottiene come soluzione dell'equazione

$$\eta^C = 1 + \frac{1}{3}\eta^C$$

e risulta $\eta^C = \frac{3}{2}$.

- 3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per cui $K = 7/15$.

Con semplici calcoli si ricavano

$$E[X] = \frac{41}{30}, \quad E[X^2] = \frac{37}{15}, \quad Var(X) = \frac{539}{900} .$$

La funzione di ripartizione $F(x)$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{15}x - \frac{2}{15} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } 3 \leq x \end{cases} .$$