Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **12/01/05**

1) Data l'equazione
$$\log(x) - \frac{1}{x} = 0 \,,$$
determinare quante sono le soluzioni reali con relativi intervalli di separazione.
Studiare la convergenza dei metodi iterativi
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{1}{\log(x_i)} \,, \quad i = 0, 1, 2, \dots \,, \\ x_{i+1} &= e^{1/x_i} \,, \quad i = 0, 1, 2, \dots \,. \end{aligned}$$
Approssimare la soluzione piú grande con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Una persona si reca agli spettacoli teatrali comprando un biglietto di **loggione**, **palco** o **platea**, in funzione del biglietto acquistato per gli spettacoli precedenti secondo le seguenti probabilitá. Se aveva comprato un biglietto per il

loggione : si reca ancora nel loggione con probabilitá $p = \frac{1}{3}$, nel palco con probabilitá $p = \frac{1}{2}$, in platea con probabilitá $p = \frac{1}{6}$;

palco : compra un biglietto per il loggione con $p = \frac{1}{4}$, per il palco con $p = \frac{1}{2}$, per la platea con $p = \frac{1}{4}$;

platea : per il loggione con $p = \frac{1}{6}$, per il palco con $p = \frac{1}{3}$, per la platea con $p = \frac{1}{2}$.

a) Determinare la matrice di transizione della catena di Markov.
b) Classificare gli stati della catena di Markov.
c) Determinare la distribuzione limite.
d) Se i biglietti hanno i seguenti costi: loggione 10 Euro, palco 30 Euro, platea 60 Euro, quanto spende mediamente lo spettatore?

3) In una popolazione si hanno il 30% di persone Bionde (B) ed il 70% di persone Castane (C). Delle persone Bionde il 15% ha gli occhi Marroni (M) mentre delle persone castane il 75%. Scegliendo a caso una persona qual è la probabilità di trovare una persona con gli occhi marroni?

Soluzione

1) L'equazione ha una sola soluzione reale appartenente $\alpha \in]1.5, 2[$.
Il primo metodo non assicura la convergenza poiché, posto $\phi_1(x) = \frac{1}{\log(x)}$, risulta $\mid \phi_1'(x) \mid = \mid \frac{1}{x \log^2(x)} \mid > 1$ per ogni $x \in]1.5, 2[$.
Il secondo metodo assicura la convergenza poiché, posto $\phi_2(x) = e^{1/x}$, risulta $\mid \phi_2'(x) \mid = \mid \frac{e^{1/x}}{x^2} \mid < 1$ per ogni $x \in]1.5, 2[$.
Utilizzando il secondo metodo con valore iniziale $x_0 = 1.75$, si ottiene $\alpha \in]1.76, 1.77[$.

2) Indicando con E_1, E_2, E_3, rispettivamente, gli stati **loggione**, **palco**, **platea**, la matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

La matrice è irriducibile per cui gli stati sono tutti transitori. La distribuzione limite π, soluzione del sistema $\pi = \pi T$, è

$$\pi = \frac{1}{49}(12, 22, 15) .$$

La spesa media dello spettatore si ha moltiplicando il vettore π per il vettore $(10, 30, 60)$ ed ottenendo $34, 28$ Euro.

3) Risulta

$$P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.7,\ P(M|B) = 0.15,\ P(M|C) = 0.75.$$

Da questi si deduce

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap B) + P(M \cap C) = P(B)P(M|B) + P(C)P(M|C) \\ &= 0.3 \cdot 0.15 + 0.7 \cdot 0.75 = \frac{57}{100} = 0.57 . \end{aligned}$$