Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 9/01/09

1) Studiare l'equazione

$$\log|x| - x^2 + K = 0\,, \qquad K \in R$$

al variare del parametro reale K.
Posto $K = 1$ si determinino intervalli di separazione delle radici reali e si studi la convergenza dei metodi

$$x_{i+1} = e^{x_i^2-1} \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

$$x_{i+1} = \sqrt{1 + \log|x_i|} \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

per approssimare la soluzione positiva più piccola.

2) Si lancia ripetutamente un dado equilibrato a 4 facce. Sia X_n la variabile che indica il valore minimo ottenuto dopo n lanci del dado e si consideri la catena di Markov che descrive la variazione di X_n.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
b) Classificare gli stati della catena.
c) Calcolare le distribuzioni invarianti.
d) Determinare le probabilità di assorbimento.
e) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha+1}{x} & x = 1, 2, 3, 4, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

a) Determinare la costante α.
b) Calcolare $E[X]$.
c) Calcolare $Var(X)$.
d) Determinare la funzione di ripartizione.

Soluzione

1) Eseguendo la separazione grafica

$$\begin{cases} y = \log|x| \\ y = x^2 - K \end{cases}$$

posto $K^* = \frac{1}{2}(1 + \log 2) \simeq 0.8466$ si deduce che l'equazione data ha le seguenti soluzioni:

$K > K^*$ 4 soluzioni reali, distinte, 2 positive e due negative;

$K = K^*$ 2 coppie di soluzioni reali coincidenti date da

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

$K < K^*$ nessuna soluzione reale.

Posto $K = 1$ si hanno 4 soluzioni reali distinte a coppie di segno opposto. In particolare si hanno le soluzioni $x = 1$ e $x = -1$. Le altre due soluzioni sono separate dagli intervalli $x_3 \in]-0.5, -0.4[$ e $x_4 \in]0.4, 0.5[$.
Si vuole approssimare x_4.
Il primo metodo proposto ha $\phi(x) = e^{x^2-1}$ per cui $\phi'(x) = 2xe^{x^2-1}$. Se $x \in]0.4, 0.5[$ risulta $|\phi'(x)| < 1$ per cui il metodo converge scegliendo opportunamente il punto iniziale.
Il secondo metodo proposto ha $\phi(x) = \sqrt{1 + \log|x|}$ per cui $\phi'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{1+\log|x|}}$.
Se $x \in]0.4, 0.5[$ risulta $|\phi'(x)| > 1$ per cui il metodo non assicura la convergenza.

2) La variabile X_n assume i quattro valori $1, 2, 3, 4$, per cui indicheremo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si ha una classe chiusa $\mathcal{C}^{(1)}$ data dallo stato assorbente E_1 mentre gli stati transitori sono dati dall'insieme $\tau = \{E_2, E_3, E_4\}$.
Si ha un'unica distribuzione limite o invariante $\pi = (1, 0, 0, 0)$.
Le probabilità di assorbimento sono (banalmente)

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = 1\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{lclclcl}
\frac{1}{4}\eta_2 & & & & & = & 1 \\
\frac{1}{4}\eta_2 & - & \frac{1}{2}\eta_3 & & & = & -1 \\
\frac{1}{4}\eta_2 & + & \frac{1}{4}\eta_3 & - & \frac{3}{4}\eta_4 & = & -1
\end{array}$$

data da

$$\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 4\,.$$

3) La costante α si determina imponendo $\sum_{x=1}^{4} f(x) = 1$. Essendo

$$\sum_{x=1}^{4} f(x) = (2\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = (2\alpha+1)\frac{25}{12}$$

si ha $\alpha = -\frac{13}{50}$.
Da questo segue

$$E[X] = \frac{12}{25}\cdot 4 = \frac{48}{25}\,,$$

$$E[X^2] = \frac{12}{25}\cdot 10 = \frac{24}{5}\,,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{24}{5} - \left(\frac{48}{25}\right)^2 = \frac{696}{625}\,.$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \frac{12}{25} & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{18}{25} & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{22}{25} & \text{se} \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad 4 \le x \end{cases}$$