



Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 12/01/10

- 1) Studiare l'equazione

$$2 \log |x| - x^2 - K = 0, \quad K \in R,$$

al variare del parametro reale K .

Posto $K = -2$ si determinino intervalli di separazione delle radici reali e si studi la convergenza del metodo di Newton per approssimarle.

Approssimare tali soluzioni con massimo errore assoluto E minore di 10^{-2} .

- 2) La matrice di transizione di una catena di Markov è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) La catena di Markov risulta riducibile?
- b) Classificare gli stati della catena.
- c) Calcolare le distribuzioni invarianti.
- d) Determinare le probabilità di assorbimento.
- e) Determinare i tempi medi di assorbimento.

- 3) Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità

$$f(x) = K e^{-|x|}, \quad x \in R.$$

- a) Determinare la costante K .
- b) Calcolare $E[X]$.
- c) Calcolare $Var(X)$.
- d) Determinare la funzione di ripartizione.

SOLUZIONE

- 1) Eseguendo la separazione grafica

$$\begin{cases} y &= 2 \log |x| \\ y &= x^2 + K \end{cases}$$

si deduce che l'equazione data ha le seguenti soluzioni:

$K < -1$ 4 soluzioni reali, distinte, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_4$;

$K = -1$ 2 coppie di soluzioni reali coincidenti date da

$$\alpha_{1,2} = 1, \quad \alpha_{3,4} = -1;$$

$K > -1$ nessuna soluzione reale.

Posto $K = -2$ si hanno 4 soluzioni reali distinte a coppie di segno opposto $\alpha_1 \in [0.1, 0.5]$, $\alpha_2 = -\alpha_1 \in [-0.5, -0.1]$, $\alpha_3 \in [1.5, 2]$ e $\alpha_4 = -\alpha_3 \in [-2, -1.5]$.

Posto $f(x) = 2 \log |x| - x^2 - K$ risultano $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x$ e $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - 2$. Si deduce immediatamente che nell'intervallo di separazione di α_1 si ha $f' > 0$ e $f'' < 0$ mentre nell'intervallo di separazione di α_3 risulta $f' < 0$ e $f'' < 0$. Il metodo di Newton è quindi convergente in entrambi i casi; per approssimare α_1 si assume $x_0 = 0.1$ mentre per approssimare α_3 si può scegliere $x_0 = 2$. Utilizzando tale metodo si ricava

$$\alpha_1 \in [0.39, 0.40], \quad \alpha_3 \in [1.77, 1.78].$$

- 2) La catena è riducibile presentando una classe chiusa $\mathcal{C}^{(1)}$ composta dal solo stato assorbente E_4 . Gli stati E_1, E_2, E_3 sono transitori. Ovviamente si ha una unica distribuzione limite $\pi = (0, 0, 0, 1)$. Le probabilità di assorbimento, avendosi una sola classe chiusa, sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

I tempi medi di assorbimento si ottengono dal sistema lineare

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 + 1 \\ \eta_2 &= \frac{1}{9}\eta_1 + \frac{4}{9}\eta_2 + \frac{4}{9}\eta_3 + 1 \\ \eta_3 &= \frac{4}{9}\eta_2 + \frac{4}{9}\eta_3 + 1 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\eta_1 = \frac{45}{2}, \quad \eta_2 = \frac{43}{2}, \quad \eta_3 = 19.$$

- 3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ da cui si ottiene $K = 1/2$.

Da questo segue

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0 ,$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2 ,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = 2 .$$

La funzione di ripartizione è

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^t & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2}(2 - e^{-t}) & \text{se } t \geq 0 \end{cases} .$$