Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **29/01/04**

1) Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considerando $A = N - P$, studiare la convergenza dello schema iterativo

$$x^{(k+1)} = N^{-1}Px^{(k)} + N^{-1}b\,.$$

2) Una catena di Markov ha matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la distribuzione limite.

c) Determinare le probabilitá di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Il 60% (C) di una popolazione $\mathcal{A}$ é interessata allo sport del calcio. Il 15% di C é composto da tifosi della squadra I e l’80% di C ha in antipatia la squadra J. Tra coloro che non si interessano di calcio la squadra I piace all’8% e la squadra J NON piace al 50%.
Scelto a caso un elemento di $\mathcal{A}$ determinare le probabilitá di avere

a) un simpatizzante della squadra I;

b) un NON simpatizzante della squadra J (NJ);

c) un NON simpatizzante della squadra I (NI) sapendo che é un NON simpatizzante della squadra J (si supponga $P(NJ|I) = 1$).

Soluzione

1) Per differenza risulta

$$P = N - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$N^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, H = N^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di H sono gli autovalori dei due blocchi diagonali. Risolvendo le due equazioni caratteristiche si ha

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{19},\ \lambda_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Risultando $\rho(H) = 1 + \sqrt{19}$ il metodo non é convergente.

2) La catena risulta riducibile.
Indicando con E_1, E_2, E_3, E_4 gli stati della catena, si hanno due classi chiuse, ciascuna delle quali costituita da uno stato assorbente, $C_1 = \{E_1\}$, $C_2 = \{E_5\}$ mentre gli stati E_2, E_3, E_4 sono stati transitori.
Le distribuzioni limite sono due (si hanno due classi chiuse) e sono $\pi_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $\pi_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$.
Le probabilitá di assorbimento nella classe chiusa C_1 si determinano risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} -\lambda_2 + \frac{1}{6}\lambda_3 + \frac{1}{6}\lambda_4 = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\lambda_2 - \lambda_3 + \frac{1}{3}\lambda_4 = 0 \\ \frac{1}{6}\lambda_2 + \frac{1}{6}\lambda_3 - \lambda_4 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

ed ottenendo

$$\lambda_2^{C_1} = \frac{100}{189}, \quad \lambda_3^{C_1} = \frac{68}{189}, \quad \lambda_4^{C_1} = \frac{22}{27}.$$

Le probabilitá di assorbimento nella classe C_2 sono (ovviamente)

$$\lambda_2^{C_2} = \frac{89}{189}, \quad \lambda_3^{C_2} = \frac{121}{189}, \quad \lambda_4^{C_2} = \frac{5}{27}.$$

I tempi medi di assorbimento siu ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\eta_2 & + & \frac{1}{6}\eta_3 & + & \frac{1}{6}\eta_4 & = & -1 \\ \frac{1}{6}\eta_2 & - & \eta_3 & + & \frac{1}{3}\eta_4 & = & -1 \\ \frac{1}{6}\eta_2 & + & \frac{1}{6}\eta_3 & - & \eta_4 & = & -1 \end{cases}$$

trovando la soluzione

$$\eta_2 = \frac{14}{9}, \quad \eta_3 = \frac{16}{9}, \quad \eta_4 = \frac{14}{9}.$$

3) Indichiamo con NC, NI e NJ gli insiemi delle persone che non appartengono, rispettivamente, a C, I e J.
Risulta $P(C) = \frac{3}{5}$, $P(NC) = \frac{2}{5}$, $P(I|C) = \frac{3}{20}$, $P(I|NC) = \frac{2}{25}$, $P(NJ|C) = \frac{4}{5}$, $P(NJ|NC) = \frac{1}{2}$.
Risulta evidente

$$P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|NC)P(NC) = \frac{61}{500} \,,$$

$$P(NJ) = P(NJ|C)P(C) + P(NJ|NC)P(NC) = \frac{17}{25} \,.$$

Da

$$P(NJ) = P(NI)P(NJ|NI) + P(I)P(NJ|I)$$

si ricava $P(NJ|NI) = \frac{237}{439}$. Infine dal Teorema di Bayes

$$P(NI|NJ) = \frac{P(NI)P(NJ|NI)}{P(NJ)}$$

si ha

$$P(NI|NJ) = \frac{279}{340} \,.$$