Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **28/01/05**

1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Posto $B = \alpha A$, indicare per quali valori reali di α la matrice B risulta convergente.

2) Una catena di Markov ha matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare le probabilitá di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente funzione di densitá congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Kx^2y & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 3 \ , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale K.

b) Calcolare le densitá marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Le due variabili sono indipendenti?.

d) Calcolare $P(Y \leq X^2/2)$.

Soluzione

1) Si considera la matrice $C = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. L'equazione caratteristica della matrice C é $\mu^4 - 8\mu^2 = 0$ che ha soluzioni $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 = -\mu_4 = 2\sqrt{2}$. Segue che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 2 + 2\sqrt{2}\ ,\ \lambda_4 = 2 - 2\sqrt{2}\ .$$

La matrice $B = \alpha A$ risulta convergente se $\mid \alpha \mid < \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$.

2) La catena risulta riducibile.
Indicando con E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 gli stati della catena, si hanno due classi chiuse $C^{(1)} = \{E_1, E_5\}$ e $C^{(2)} = \{E_3, E_4\}$, ed il solo stato transitorio E_2.
La probabilitá di assorbimento nella classe chiusa $C^{(1)}$ si determinano risolvendo l'equazione

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\lambda_2^{(1)}$$

la cui soluzione é $\lambda_2^{(1)} = \frac{5}{8}$.
Ovviamente, si ha $\lambda_2^{(2)} = \frac{3}{8}$.
Il tempo medio di assorbimento η_2 si ottiene risolvendo l'equazione

$$\eta_2 = 1 + \frac{1}{5}\eta_2$$

che ha soluzione $\eta_2 = \frac{5}{4}$.

3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ per cui $K = 1/12$.
Con semplici calcoli si ricavano le densitá marginali

$$f_X(x) = \int_0^3 f(x,y)dy = \frac{3}{8}x^2\ ,\ f_Y(y) = \int_0^2 f(x,y)dx = \frac{2}{9}y\ .$$

Le due variabili risultano indipendenti poiché risulta $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ per ogni coppia $(x,y) \in R^2$.
La probabilitá richiesta é

$$\begin{aligned} P(Y \le X^2/2) &= \int_0^2 \int_0^{x^2/2} f(x,y)dydx \\ &= \frac{1}{12}\int_0^2 x^2 \int_0^{x^2/2} ydydx \\ &= \frac{1}{12}\int_0^2 \frac{x^6}{8}dx \\ &= \frac{4}{21}\ . \end{aligned}$$