Dipartimento di Matematica Applicata "Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **30/01/07**

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 4 & -1 \\ -14 & -6 & 8 & -2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare gli autovalori della matrice A.

b) Per quali valori del parametro reale α la matrice $B = \alpha(A - 2I)$ risulta convergente?

2) Tre urne A, B, C contengono ciascuna 6 palline colorate in Rosso (R), Nero (N) o Verde (V). Le palline nell'urna A sono 2R, 2N e 2V, nell'urna B sono 1R, 4N e 1V, infine, nell'urna C abbiamo 4R e 2V.
Si estrae una pallina e (dopo averla reinserita nell'urna stessa) si proseguono le estrazioni dall'urna A se è uscita una pallina di colore Rosso, dall'urna B se il colore è Nero o dall'urna C se il colore è Verde.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Supposto di iniziare le estrazioni dall'urna A, qual è la probabilità che dopo due estrazioni si debba proseguire dalla stessa urna A?

d) Qual è la probabilità di estrarre una pallina dall'urna B dopo 578 estrazioni?

3) Due variabili aleatorie X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} K\, x/y & 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

a) Determinare la costante K.

b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Le variabili X e Y sono indipendenti?

d) Calcolare $P(x - y + 1 > 0)$.

Soluzione

1) $P(x) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$ è il polinomio caratteristico della matrice A per cui gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 = -1\,, \quad \lambda_4 = -2\,.$$

Affinché la matrice $\alpha(A - 2I)$ risulti convergente, i suoi autovalori $\alpha(\lambda_i - 2)$, $i = 1, 2, 3, 4$, devono avere modulo minore di 1 per cui deve risultare

$$|\alpha| < \frac{1}{|\lambda_i - 2|}\,, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

che fornisce la condizione $|\alpha| < \frac{1}{4}$.

2) Indichiamo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 1, 2, 3$, rispettivamente, le tre urne A, B, C. La matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\,.$$

I tre stati sono transitori.
Iniziare le estrazioni dall'urna A significa che il vettore di probabiltà iniziale è $p^{(0)} = (1, 0, 0)$ da cui segue $p^{(1)} = p^{(0)}A = (1/3, 1/3, 1/3)$, $p^{(2)} = p^{(1)}A = (7/18, 1/3, 5/18)$. La probabilità richiesta è $7/18$.
La probabilità dopo 578 estrazioni equivale a conoscere la distribuzione limite π che si ottiene risolvendo il sistema $\pi = \pi A$ con la condizione $\pi_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, e $\sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1$. Tale soluzione è

$$\pi = \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11} \right)\,.$$

In particolare la probabilità richiesta è $4/11$.

3) La costante K si determina imponendo $\int\int_{R^2} f(x, y)dxdy = 1$. Si ottiene $K = \frac{2}{\log 2}$.
Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \int_1^2 f(x, y)dy = 2x\,, \quad f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y)dx = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{y}\,.$$

Risultando $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ le due variabili sono indipendenti.

La probabilità richiesta si ottiene da

$$
\begin{aligned}
P(x-y+1>0) &= \frac{2}{\log 2}\int_0^1 dx \int_1^{x+1} \frac{x}{y} dy \\
&= \frac{2}{\log 2}\int_0^1 x\log(x+1)dx \\
&= \frac{2}{\log 2}\left(\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(\log 2 + \frac{1}{2} - \log 2\right) \\
&= \frac{1}{2\log 2}\,.
\end{aligned}
$$