Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 29/01/08

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare gli autovalori della matrice A.

b) Sono verificate le ipotesi per avere la convergenza del metodo delle potenze?

c) Determinare i valori reali di α per i quali la matrice $B = I + \alpha A$ risulta convergente.

2) Si ha una urna in cui si inserisce una pallina ogni volta che lanciando un dado equilibrato a 6 facce si ha un numero superiore a quello delle palline che sono dentro l'urna. La situazione rimane invariata se si ottiene esattamente lo stesso numero mentre si toglie una pallina se si ha un numero piú piccolo.
Il processo ha termine nel momento in cui nell'urna ci sono 5 palline.

a) Costruire la matrice di transizione.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Calcolare le distribuzioni invarianti.

d) Determinare le probabilità di assorbimento.

e) Supponendo di partire con due palline all'interno dell'urna, qual è la probabilità di avere ancora due palline dopo due passi della catena?

3) Si ha un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10. La probabilità di estrarre una pallina è proporzionale al numero della pallina stessa.
Si estrae una pallina e si vincono 3 Euro se si ha il numero 10, si vince un Euro se esce il numero 9, si perde un Euro se esce un numero tra 5 e 8 (estremi compresi) e si perdono 2 Euro se si ha un numero tra 1 e 4 (estremi compresi).

a) Determinare la probabilità di estrarre ogni singola pallina.

b) Il gioco proposto risulta equo?

Soluzione

1) La matrice data risulta riducibile e la sua forma ridotta è la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori sono gli elementi della diagonale di C per cui

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \, , \quad \lambda_3 = 1 \, , \quad \lambda_4 = -1 \, , \quad \lambda_5 = 5 \, .$$

La matrice A è diagonalizzabile avendo un unico autovalore con molteplicità algebrica 2 (gli altri autovalori sono semplici) ed a questo autovalore corrisponde una molteplicità geometrica anch'essa uguale a 2, inoltre si ha un autovalore (λ_5) di modulo dominante rispetto agli altri autovalori per cui sono verificate le ipotesi del teorema di convergenza del metodo delle potenze.
Non esistono valori reali di α che rendono la matrice B convergente dovendosi avere $-2 < \alpha\lambda < 0$ per ogni λ autovalore di A.

2) Indichiamo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 1,2,3,4,5$ dove i indica il numero di palline presenti nell'urna.
La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 3/6 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si ha una classe chiusa $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_5\}$ dove lo stato E_5 risulta uno stato assorbente. Gli stati transitori sono dati da $\tau = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.
Si ha una unica distribuzione limite data da

$$\pi = (0,0,0,0,1) \, .$$

Le probabilità di assorbimento sono (banalmente)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \, .$$

Partire dallo stato E_2 equivale ad avere una distribuzione iniziale $p^{(0)} = (0,1,0,0,0)$. Dopo due passi della catena si ha

$$p^{(2)} = p^{(0)} T^2 = \frac{1}{18}(1,7,4,6,0)$$

per cui la probabilità richiesta è $\frac{7}{18}$.

3) La probabilità di estrarre la pallina contrassegnata col numero i è $\frac{i}{55}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.
Indicando con X una v.a. che assume i valori $3, 1, -1, -2$ (vincita o perdita di Euro) questa ha la seguente densità di probabilità:

$$p(x) = \begin{cases} 3 & p = \frac{10}{55} \\ 1 & p = \frac{9}{55} \\ -1 & p = \frac{26}{55} \\ -2 & p = \frac{10}{55} \end{cases} .$$

Risultando $E[X] = -\frac{7}{55}$, il gioco non è equo.