



Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 28/01/09

- 1) Determinare pesi e nodi della formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 |x|^3 f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + E(f)$$

in modo da ottenere il massimo grado di precisione.

Posto $E(f) = K f^{(m)}(\xi)$, calcolare m e K .

- 2) Si considera un triangolo equilatero i cui vertici sono numerati da 1 a 3. Una persona si può muovere da un vertice ad uno dei vertici adiacenti con probabilità p ($0 < p < 1$) in senso orario e con probabilità $1 - p$ in senso antiorario.

- a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
- b) Classificare gli stati della catena.
- c) La catena risulta regolare?
- d) Calcolare le distribuzioni invarianti.
- e) Posto $p^{(0)} = (0.5, 0, 0.5)$, determinare la probabilità di trovarsi nel vertice contrassegnato dal numero 2 dopo due passi della catena.

- 3) Un Consiglio Comunale è composto da 10 persone di cui 4 sono donne e 6 sono uomini. Si forma una commissione di 5 persone estratte a caso e sia X la variabile che indica quante donne sono entrate a far parte della commissione.

- a) Determinare la densità di probabilità $p(x)$.
- b) Calcolare $E[X]$.
- c) Calcolare $Var(X)$.
- d) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

SOLUZIONE

- 1) Imponendo che la formula proposta sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ si ottiene il sistema non lineare

$$\begin{cases} a_0 + a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 &= 0 \\ a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 &= \frac{1}{3} \\ a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 &= 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$a_0 = a_1 = \frac{1}{4}, \quad x_0 = -x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il grado di precisione ottenuto è $g = 3$.

Risultano quindi $m = 4$ e, valutando l'errore commesso per $f(x) = x^4$, $K = \frac{1}{864}$.

- 2) Indiando con $E_i, i = 1, 2, 3$, i tre stati della catena, la matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

La catena risulta irriducibile per cui gli stati sono tutti transitori.

La catena è regolare perché, per esempio, T^2 ha tutti i suoi elementi positivi.

La distribuzione limite o invariante è, essendo la matrice T bistocastica,

$$\pi = \frac{1}{3}(1, 1, 1).$$

Da $p^{(0)} = \frac{1}{2}(1, 0, 1)$ si ottiene

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}(p, 1, 1-p), \quad p^{(2)} = \frac{1}{2}(1-p^2, 2p^2-2p+1, 2p-p^2)$$

per cui la probabilità richiesta è $\frac{1}{2}(2p^2-2p+1)$.

- 3) La variabile X segue la legge ipergeometrica

$$p(x) = \frac{\binom{6}{5-x} \binom{4}{x}}{\binom{10}{5}}$$

per cui si ha

$$p(x) \begin{cases} \frac{6}{252} & \text{se } x = 0 \\ \frac{60}{252} & \text{se } x = 1 \\ \frac{120}{252} & \text{se } x = 2 \\ \frac{60}{252} & \text{se } x = 3 \\ \frac{6}{252} & \text{se } x = 4 \end{cases} .$$

Segue

$$E[X] = 1 \cdot \frac{60}{252} + 2 \cdot \frac{120}{252} + 3 \cdot \frac{60}{252} + 4 \cdot \frac{6}{252} = \frac{504}{252} = 2 ,$$

$$E[X^2] = 1 \cdot \frac{60}{252} + 4 \cdot \frac{120}{252} + 9 \cdot \frac{60}{252} + 16 \cdot \frac{6}{252} = \frac{1176}{252} = \frac{14}{3} ,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{2}{3} .$$

Infine si ha la funzione di ripartizione

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{6}{252} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{66}{252} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{186}{252} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \frac{246}{252} & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se } 4 \leq x \end{cases} .$$