Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 15/06/09

1) È data l'equazione

$$\log|x| + x^2 + 2x = 0\,.$$

a) Determinare il numero delle radici reali e per ognuna di esse indicare un intervallo di separazione.

b) Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n^2 + \log|x_n|)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

c) Indicare valori iniziali x_0 che rendono convergente il metodo di Newton.

2) Due urne A e B contengono ciascuna una pallina bianca ed una pallina nera. Si estrae una pallina da entrambe le urne e si reinseriscono scambiandole tra loro. Si prosegue ripetendo la stessa procedura. Si prenda in esame l'urna A e le possibili combinazioni di palline al suo interno.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) La catena risulta riducibile?

c) Classificare gli stati della catena di Markov.

d) Determinare la/e distribuzione/i limite.

e) Supponendo di avere la distribuzione iniziale $p^{(0)}$ uniforme, determinare la probabilità di avere una pallina bianca ed una nera dopo 3 passi della catena.

3) Due variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Kx^2y & 0 < x < 3,\ 0 < y < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad K \in R\,.$$

a) Calcolare la costante reale K.

b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

d) Calcolare $P(Y > -X^2 + 3X - 2)$.

Soluzione

1) Da una semplice separazione grafica si deduce che l'equazione ha due soluzioni reali

$$\alpha_1 \in]-7/4, -3/2[= I_1 \, , \qquad \alpha_2 \in]1/4, 1/2[= I_2 \, .$$

Il metodo proposto ha funzione di iterazione $\phi(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + \log|x|)$ per cui risulta $\phi'(x) = -\frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{x}\right)$.
Si verifica facilmente che $|\phi'(x)| > 1$ per $x \in I_1$ e $x \in I_2$ per cui il metodo proposto **non** assicura la convergenza.
Indicato con $f(x) = \log|x| + x^2 + 2x$ si ha $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + 2$ e $f'' = -\frac{1}{x^2} + 2$.
Per $x \in I_1$ si ha $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ per cui il metodo di Newton converge sicuramente scegliendo $x_0 = -\frac{7}{4}$.
Per $x \in I_2$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per cui il metodo di Newton converge sicuramente scegliendo $x_0 = \frac{1}{4}$.
($\alpha_1 = -1.68957\ldots$, $\alpha_2 = 0.39178\ldots$)

2) Gli stati della catena sono $E_1 = \{BB\}$, $E_2 = \{BN\}$, $E_3 = \{NN\}$. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

La catena risulta irriducibile per cui non ci sono classi chiuse e gli stati sono tutti transitori (o ricorrenti).
Si ha una sola distribuzione limite

$$\pi = \frac{1}{6}(1, 4, 1) \, .$$

Posto $p^{(0)} = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ si ha $p^{(1)} = \frac{1}{12}(1, 10, 1)$, $p^{(2)} = \frac{1}{24}(5, 14, 5)$ e $p^{(3)} = \frac{1}{48}(7, 34, 7)$.
La probabilità richiesta è $\frac{17}{24}$.

3) La costante K si determina imponendo che risulti $\int\int_{R^2} f(x, y)dx\,dy = 1$ da cui

$$K \int_0^3 \left(x^2 \int_0^2 y dy \right) dx = 18K \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{1}{18} \, .$$

Si ottiene anche

$$f_X(x) = \int_0^2 f(x, y)dy = \frac{1}{9}x^2 \, , \qquad f_Y(y) = \int_0^3 f(x, y)dx = \frac{1}{2}y \, ,$$

$$E[X] = \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 \, dx = \frac{9}{4} \, , \qquad E[X^2] = \int_0^3 \frac{1}{9}x^4 \, dx = \frac{27}{5} \, ,$$

da cui

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80} \, .$$

La probabilità richiesta è

$$P(Y > -X^2 + 3X - 2) = 1 - \frac{1}{18} \int_1^2 x^2 \left(\int_0^{-x^2+3x-2} y dy \right) dx = 1 - \frac{2}{945} = \frac{943}{945}.$$