Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **05/06/03**

1) Studiare l'equazione

$$e^{-x} - x^2 + 2x = 0$$

indicando il numero delle radici reali e i relativi intervalli di separazione. Approssimare la radice piú grande con un massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$ utilizzando il metodo di Newton (dopo averne studiato la convergenza).

2) Sono date tre urne contenenti palline rosse, bianche e nere.
L'urna A contiene 3 palline rosse, 3 palline bianche e 3 palline nere.
L'urna B contiene 2 palline rosse, 2 palline bianche e 4 palline nere.
L'urna C contiene 1 pallina rossa e 1 pallina nera.
Si estrae una pallina da una urna reinserendola dopo l'estrazione. Se esce una pallina rossa si proseguono le estrazioni dall'urna A, se la pallina é bianca si prosegue dall'urna B mentre se la pallina estratta é nera si passa all'urna C.

a) Scrivere la matrice di transizione T della catena di Markov.
b) La catena risulta riducibile?
c) Classificare gli stati della catena di Markov.
d) Posto $p^{(0)} = (0.5, 0.5, 0)$ calcolare $p^{(2)}$.
e) Determinare, se esiste, la distribuzione limite.

3) Sia X una variabile aleatoria con funzione di densitá

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k\,, & \text{se } 0 \leq x \leq 3\,, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare il valore reale k.
b) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.
c) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

SOLUZIONE

1) Con una separazione grafica si evidenziano 3 soluzioni reali della equazione assegnata separate dai seguenti intervalli:

$$\alpha_1 \in]-3,-2[\,, \quad \alpha_2 \in]-1,0[\,, \quad \alpha_3 \in]2,3[\,.$$

Considerando $f(x) = e^{-x} - x^2 + 2x$, le derivate $f'(x) = -e^{-x} - 2x + 2$, $f''(x) = e^{-x} - 2$ risultano di segno negativo per i valori $x \in]2,3[$ per cui il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie $x_0 = 3$. Applicando il metodo si arriva ad avere $\alpha_3 \in]2.06, 2.07[$.

2) La matrice di transizione della catena di Markov proposta é

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La catena risulta irriducibile.
Gli stati sono tre e sono tutti transitori (non esistono classi chiuse o stati assorbenti).
Il vettore di probabilitá $p^{(2)}$ si ottiene esseguendo il prodotto $p^{(0)}T^2$ per cui si ha

$$p^{(2)} = \frac{1}{288}(109, 49, 130)\,.$$

La distribuzione limite π si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo $\pi = \pi T$ con la condizione $\|\pi\|_1 = 1$; svolgendo i calcoli si ottiene

$$\pi = \frac{1}{23}(9, 4, 10)\,.$$

3) Il valore di k si determina imponendo che $f(x)$ sia una densitá di probabilitá e che quindi soddisfi la condizione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Quindi da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x + k\right) dx = \left[\frac{x^2}{12} + kx\right]_0^3 = \frac{9}{12} + 3k$$

si ricava $k = \frac{1}{12}$.
La funzione di ripartizione é

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0\,, \\ \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x\,, & \text{se } 0 \le x \le 3\,, \\ 1\,, & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

Infine

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^3 x \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12} \right) dx \\
&= \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x \right) dx = \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{24} \right]_0^3 = \frac{15}{8} \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^3 x^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12} \right) dx \\
&= \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2 \right) dx = \left[\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{36} \right]_0^3 = \frac{33}{8} \, ,
\end{aligned}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{33}{8} - \left(\frac{15}{8} \right)^2 = \frac{39}{64} \, .$$