Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **3/06/04**

1) Studiare l'equazione
$$\log x - x^2 + K = 0$$
al variare del parametro reale K.
Posto $K = 2$, approssimare le eventuali radici reali con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Si hanno quattro stanze comunicanti. Una persona si muove da una stanza all'altra seguendo il seguente criterio.
Si lancia 4 (quattro) volte una moneta equilibrata.
Trovandosi nella j-esima stanza, si passa alla stanza i-esima se si sono avute i teste ($i \neq j$) e si rimane nella stessa stanza se si sono avute 0 o j teste.

a) Scrivere la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la distribuzione limite.

d) Se all'istante 0 ci si trova nella quarta stanza, qual é la probabilitá di trovarsi nella quarta stanza dopo due spostamenti?

3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densitá
$$f(x) = \begin{cases} K\cos x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale K.

b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

d) Calcolare $P\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

Soluzione

1) Si esegue la separazione grafica data da $y = \log x$ e $y = x^2 - K$. É evidente che si tratta della curva data dal logaritmo e da un fascio di parabole con concavitá rivolta verso l'alto ed asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate.
Si deve stabilire il valore K^* che determina la condizione di tangenza tra le due curve. Questo si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \log x - x^2 + K & = & 0 \\ \frac{1}{x} - 2x & = & 0 \end{cases} .$$

Dalla seconda equazione si ha $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ascissa del punto di tangenza) e $K^* = \frac{1}{2} - \log \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si ha quindi che per

$\mathbf{K} < \mathbf{K}^*$ non si hanno soluzioni reali,

$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ si hanno due soluzioni reali coincidenti x^*,

$\mathbf{K} > \mathbf{K}^*$ si hanno due soluzioni reali distinte.

Posto $K = 2$ si hanno due soluzioni distinte $\alpha_1 \in]0.01, 0.5[$ e $\alpha_2 \in]1, 2[$. In entrambi i casi, posto $f(x) = \log x - x^2 + K$, risultano $f'(x)$ e $f''(x)$ di segno costante sugli intervalli di separazione. Scegliendo come punti iniziali, rispettivamente, $x_0 = 0.01$ e $x_0 = 2$, si ottiene

$$\alpha_1 \in]0.13, 0.14[\,, \qquad \alpha_2 \in]1.56, 1.57[\,.$$

2) Indicando con $E_i = \{\text{stanza } i\text{-esima}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, gli stati della catena, la matrice di transizione é

$$T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Gli stati sono tutti transitori (o ricorrenti).
La distribuzione limite che verifica il sistema $\pi = \pi T$ é

$$\pi = \frac{1}{15}(4, 6, 4, 1)\,.$$

Posto $p^{(0)} = (0, 0, 0, 1)$, si ha $p^{(1)} = \frac{1}{16}(4, 6, 4, 2)$ e $p^{(2)} = \frac{1}{128}(34, 51, 34, 9)$ per cui la probabilitá cercata é $\frac{9}{128}$.

3) Imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ si ottiene $K = 1/2$.
Con semplici calcoli si ricavano

$$E[X] = 0\,, \quad E[X^2] = \frac{\pi^2}{4} - 2\,, \quad Var(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2\,.$$

La funzione di ripartizione $F(x)$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}\,.$$

La probabilitá cercata é

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$