



1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice A .
 - b) Calcolare gli autovalori di A .
 - c) Determinare i valori reali di α e β per i quali converge la matrice di iterazione di Jacobi.
 - d) Determinare i valori reali di α e β per i quali converge la matrice di iterazione di Gauss-Seidel.
- 2) Due ragazzi si muovono da un vertice all'altro di un poligono regolare con 7 lati. Ad ogni intervallo di tempo ciascuno dei ragazzi si sposta, con uguale probabilità, su un vertice adiacente a quello in cui si trova. Indichiamo con E_i , $i = 0, 1, 2, 3$, il numero minimo di lati del poligono che separano i due ragazzi.
- a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
 - b) La catena risulta riducibile?
 - c) Classificare gli stati della catena di Markov.
 - d) Determinare la/e distribuzione/i limite.
- 3) Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} C^2 & 0 < x < 1 \\ C/x & 1 \leq x < e \\ C^2/x & e \leq x \leq e^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare la costante reale C .
- b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.
- c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.
- d) Calcolare $P(0.5 < X < 2)$.

SOLUZIONE

1) Con semplici calcoli (Gauss o direttamente) si ha la fattorizzazione LR con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta - \alpha \end{pmatrix}.$$

Si opera la traslazione $B = A - I$ ottenendo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \beta - 1 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \\ \mu_4 = \frac{\beta - 1 - \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4\alpha - 3}}{2}, \mu_5 = \frac{\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4\alpha - 3}}{2}.$$

Segue che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \\ \lambda_4 = 1 + \frac{\beta - 1 - \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4\alpha - 3}}{2}, \\ \lambda_5 = 1 + \frac{\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4\alpha - 3}}{2}.$$

Le matrici di iterazione dei due metodi sono

$$H_J = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}, H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Per entrambi i metodi si ottiene che la condizione di convergenza è

$$|1 - \alpha| < |\beta|.$$

2) La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La catena risulta irriducibile per cui non ci sono classi chiuse e gli stati sono tutti transitori (o ricorrenti).

Si ha una sola distribuzione limite

$$\pi = \frac{1}{7}(1, 2, 2, 2).$$

3) La costante C si determina imponendo che risulti $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per cui

$$\int_0^1 C^2 dx + \int_1^e C/x dx + \int_e^{e^2} C^2/x dx = 1 \implies C = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene anche

$$E[X] = \int_0^1 \frac{1}{4}x dx + \int_1^e \frac{1}{2} dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}e - \frac{3}{8},$$

$$E[X^2] = \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{2}x dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{4}x dx = \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{6},$$

da cui

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{16}e - \frac{59}{192}.$$

Si ha la funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log x & 1 \leq x < e \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log x & e \leq x \leq e^2 \\ 1 & x > e^2 \end{cases}.$$

La probabilità richiesta risulta

$$P(0.5 < x < 2) = F(2) - F(0.5) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{8}.$$