**Dipartimento di Matematica Applicata**

**"Ulisse Dini"**

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

**LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 25/06/08**

**1)** È data l'equazione

$$e^{2x} - K(x^2 - 2x) = 0 \,, \quad K \in R \,.$$

a) Studiare l'equazione al variare del parametro reale $K$.

b) Posto $K = 2$, separare le soluzioni reali.

c) Approssimare la soluzione minore con massimo errore assoluto $E < 10^{-2}$ utilizzando il metodo di Newton dopo averne verificata la convergenza.

**2)** Una catena di Markov ha la matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 5/6 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

a) La catena risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Calcolare le probabilità di assorbimento

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

e) Determinare la/e distribuzione/i limite.

**3)** Consideriamo un'urna contenente: 4 palline gialle, 2 palline rosse, 2 palline blu e 2 palline verdi. Si estraggono 3 palline senza rimpiazzo. Sia $X$ la variabile che indica il numero di palline gialle estratte.

a) Calcolare la probabilità che escano due palline blu e una rossa.

b) Determinare la densità di probabilità della variabile $X$.

c) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

## Soluzione

1) I valori di $K$ che è interessante determinare sono quelli per cui si hanno soluzioni di molteplicità maggiore di uno. Tali valori si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} e^{2x} - K(x^2 - 2x) & = & 0 \\ 2e^{2x} - K(2x - 2) & = & 0 \end{cases} .$$

Risultano due valori di $K$ dati da

$$\begin{array}{ll} K_1 = \frac{e^{2x_1}}{x_1 - 1} & \qquad x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} , \\ K_2 = \frac{e^{2x_2}}{x_2 - 1} & \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} . \end{array}$$

L'equazione data ha quindi le seguenti soluzioni al variare di $K$:

$$\begin{array}{rcl} K < K_2 & \rightarrow & \text{2 soluzioni reali distinte} \\ K = K_2 & \rightarrow & \text{2 soluzioni reali coincidenti uguali a } x_1 \\ K_2 < K \leq 0 & \rightarrow & \text{nessuna soluzione reale} \\ 0 < K < K_1 & \rightarrow & \text{1 soluzione reale} \\ K = K_1 & \rightarrow & \text{3 soluzioni reali di cui 2 coincidenti uguali a } x_2 \\ K > K_1 & \rightarrow & \text{3 soluzioni reali distinte} \end{array}$$

Per $K = 2$ si ha una unica soluzione reale $\alpha \in ]-0.5, 0[$.
Posto $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 4x$, si ha $f'(x) = 2e^{2x} - 4x + 4$ e $f''(x) = 4e^{2x} - 4$.
Tali derivate non cambiano segno al variare di $x$ nell'intervallo $]-0.5, 0[$ e risulta $f' > 0$, $f'' < 0$. Scegliendo $x_0 = -0.5$ il metodo di Newton converge e si ottiene $\alpha \in ]-0.17, -0.16[$ $(\alpha = -0.165733\ldots)$.

2) La matrice di transizione $T$ (quindi anche la catena) risulta riducibile.
Si presentano due classi chiuse $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_1, E_4\}$ e $\mathcal{C}^{(2)} = \{E_3, E_5\}$ con stati transitori $\mathcal{T} = \{E_2\}$.
La probabilità di assorbimento nella classe chiusa $\mathcal{C}^{(1)}$ partendo dall'unico stato transitorio è data dalla soluzione dell'equazione $\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\lambda_2^{(1)}$ che ha soluzione $\lambda_2^{(1)} = \frac{3}{4}$. Ovviamente risulta $\lambda_2^{(2)} = \frac{1}{4}$.
L'unico tempo medio di assorbimento è la soluzione dell'equazione $\eta_2 = 1 + \frac{1}{3}\eta_1$ e quindi $\eta_1 = \frac{3}{2}$.
Si hanno due distribuzioni limite

$$\pi^{(1)} = \frac{1}{11}(5, 0, 0, 6, 0) , \quad \pi^{(2)} = \frac{1}{19}(0, 0, 9, 0, 10) .$$

3) Eseguendo le tre estrazioni senza rimpiazzo, si hanno due palline blu ed una rossa con una delle sequenze BBR, BRB, RBB che hanno la stessa probabilità di realizzarsi. Quindi il valore cercat0 è

$$3\,\frac{2}{10}\,\frac{2}{9}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{60}\,.$$

La variabile $X$ ha una densità ipergeometrica assumendo solo i valori $0, 1, 2, 3$ con le seguenti probabilità:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1, \\ \frac{3}{10} & \text{se } x = 2, \\ \frac{1}{30} & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Segue

$$E[X] = \frac{6}{5}\,, \quad E[X^2] = 2 \quad Var(X) = \frac{14}{25}\,.$$